BİR SIR EPİDEMİYOLOJİ MODELİNDE OPTİMAL AŞILAMA VE TEDAVİ KONTROLÜ

Gözde CAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Nisan -2018

BİR SIR EPİDEMİYOLOJİ MODELİNDE OPTİMAL AŞILAMA VE TEDAVİ KONTROLÜ

Gözde CAN

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR

Nisan - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

GÖZDE CAN ' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bir SIR Epidemiyoloji Modelinde Optimal Aşılama Ve Tedavi Kontrolü" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

06 /04/2018

Prof. Dr. Önder UYSAL
Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü .....

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Bölüm Başkanı, Matematik Bölümü .....

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Danışman, Matematik Bölümü .....

Sınav Komitesi Üyeleri

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR
Matematik Bölümü, Dumlupınar Üniversitesi .....

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU
Matematik Bölümü, Uşak Üniversitesi .....

Doç. Dr. Ahmet BOZ
Matematik Bölümü, Dumlupınar Üniversitesi .....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının % 18 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR Gözde CAN

BİR SIR EPİDEMİYOLOJİ MODELİNDE OPTİMAL AŞILAMA VE TEDAVİ KONTROLÜ

Gözde Can

Matematik , Yüksek Lisans Tezi, 2018

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Serdar Nazlıpınar

ÖZET

Bu tezde bazı SIR tipi salgın hastalıkların matematiksel modellenmesi incelenmiştir. Ayrıca dinamik sisteme eklenen aşılama ve tedavi kontrolü ile elde edilen kontrol sistem için optimal kontrol problemi oluşturulmuştur.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde dinamik sistemlerin kararlılık analizinde ve optimal kontrol uygulamalarında kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde SIR dinamik sistemi üzerine aşılama ve tedavi kontrolünü karakterize eden bir kontrol parametresi eklenerek bir kontrol sistem oluşturulmuştur ve kararlılık analizi yapılmıştır.Üçüncü bölümde Kontrol sistem için optimal kontrol problemi verilmiş ve çözüm elde edilmiştir.Dördüncü bölümde, Optimal kontrolün SIR modeli üzerinde etkisi Nümerik olarak incelenmiştir ve yapılan nümerik çözümler grafikleri vasıtasıyla yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimal Kontrol , SIR Modeli .

OPTIMAL CONTROL OF AN EPIDEMIOLOGICAL SIR MODEL WITH VACCINATION AND TREATMENT

Gözde Can

Mathematics, M.S. THESIS, 2018

Thesis Supervisor : Assoc.Prof. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR

SUMMARY

In this thesis, mathematical modeling of some SIR-type epidemics has been examined. Furthermore, through the vaccination control and treatment control added to the dynamical system, an optimal control problem is formed for the obtained control system.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems used for the stability analysis of dynamical systems and optimal control applications are presented. In the second chapter, a control system is constructed by adding a control parameter which characterizes the vaccination and treatment control on SIR dynamical system and stability analysis is conducted. In the third chapter,An optimal control problem is introduced for the control system and the solution is obtained. In the fourth chapter, effect of optimal control on SIR model examined numerically and numerical solutions are interpreted through the graphical representations.

Keywords: Optimal Control , SIR Model.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve bu çalışmam sürecinde bana rehberlik eden, engin bilgilerini ve tecrübelerini benden esirgemeyen sayın danışman hocam Doç.Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR'a ve bana bu süreçte yardımını esirgemeyen Barbaros BAŞTÜRK'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v

SUMMARY vi

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

ÇİZELGELER DİZİNİ x

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 4

2.1. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Kararlılık Analizi 4
2.2. Otonom Sistemler 4
2.3. Denge Noktalarının Sınıflandırılması 6
2.4. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Kararlılık Analizi 7
2.5. Lineer Olmayan Sistemlerin Denge Noktalarının Kararlılığı 8
2.6. LYAPUNAV Direk Metodu 9
2.7. Optimal Kontrol Problemi 16

3. SIR MODELİ 19

3.1. SIR Modelinin Kurulumu 19

4. SIR MODELİNİN OPTİMAL KONTROLÜ 35

5. OPTİMAL KONTROLÜN NÜMERİK OLARAK HESABI 42

5.1.Optimal Kontrolün SIR Modeli Üzerine Etkisinin Nümerik Olarak İncelenmesi 42

6. SONUÇ 52

KAYNAKLAR DİZİNİ 53

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

5.1. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 \leq 1$)..... 43
5.2. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 > 1$)..... 45
5.3. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 > 1$)..... 46
5.4. u_1 ve u_2 kontrol fonsiyonlarının etkisi($C_1 = 1 \quad C_2 = 1$)..... 47
5.5. u_1 ve u_2 kontrol fonsiyonlarının etkisi($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$) ($C_1 = 1 \quad C_2 = 4$)..... 48
5.6. λ_1 ve λ_2 marjinal maliyetlerin etkisi ($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$)..... 50
5.7. λ_1 veλ_2 marjinal maliyetlerin etkisi ($C_1 = 1 \quad C_2 = 4$) ($C_1 = 1 \quad C_2 = 1$)..... 51

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

5.1. SIR Modeli için parametre değerleri 42

1. GİRİŞ

Tarih boyunca insanoğlunun karşı karşıya kaldığı doğal felaketlerden birisi de salgın hastalıklardır. Sağlık üzerine uğraşan bilim insanları yüzyıllar boyunca salgın hastalıklarla mücadele etme yollarını aramışlar ve birçok araştırma ve çözüm yolları bulmuşlardır. Belirli insan topluluklarında , hastalıkların dağılımının ölçülmesi 19.yy da yapılmaya başlanmıştır. 19. yüzyılların sonlarına kadar toplumların en büyük sorunu olan kolera, veba, çiçek gibi hastalıklar ülkeden ülkeye yayılan milyonlarca kişinin hastalanmasına ve hatta binlercesinin ölümüne yol açan enfeksiyon hastalıklarını (bulaşıcı hastalıkları) oluşturmaktadır. Bu bağlamda , hastalık yapıcı herhangi bir mikroorganizmanın insan vücuduna girip, burada yerleşmesi ve çoğalmasına "bulaşma (infeksiyon)", bunun sonucunda çıkan hastalığa da "bulaşıcı hastalık "(infeksiyon hastalığı)" adı verilmektedir . Bulaşıcı hastalıklar bazen salgın hale gelerek, toplum sağlığını önemli ölçüde tehlikeye düşürmüşlerdir. Bir hastalığın belli bir zaman aralığında fazla sayıda görülmesi durumuna "salgın (epidermi)", kıta ve kıtaları etkileyen büyük salgınlara da "pandemi" denilmektedir. Salgınlarda, mikroorganizma, bünyeye ve dış etkenlere bağlı çeşitli faktörler rol oynar.

Bulaşıcı hastalıkların nedenlerinin araştırılması ile ilgili çalışmalar epidemiyoloji alanında yapılmaktadır.Bu bağlamda epidemiyoloji,belirli toplumlarda sağlıkla ilgili durum ya da olayların dağılımı ile toplumda kişi, yer ve zaman özelliklerine göre incelenmesi ve bu çalışmanın sağlık sorunlarının önlenmesi ve kontrolüne uygulanmasıdır . Epidemiyologlar, sadece ölüm ve hastalıkla değil, sağlık durumlarının geliştirmek, sağlığı iyileştirmenin yollarıyla da ilgilenmektedirler. Zamanla birey ve toplumun sağlık konusundaki bilgileri, tutum ve davranışları, ekonomik durumları, çevre koşulları, sağlık alanındaki yenilikler; sağlık hizmetlerinin nitelik ve niceliğini, sağlık sorunlarının tanılarını, tedavilerini ve bu sorunlardan korunmayı önemli ölçüde etkiler.

Salgın hastalık için izlenen bu yolda eğer zamanında ve yeterli adımlar (aşı ,tedavi , bilgilendirme va aydınlatılma çalışmaları vb) atılırsa çoğu bulaşıcı hastalık azalır hatta giderek yok olur. Aşısı ve tedavisi olan bulaşıcı hastalıkların yayılmasını kontrol altına almak için önceden adımlar atılması son derece önemlidir.Bu durumda bir hastalığın ortaya çıkmasını engellemek onu tedavi etmekten maliyeti daha uygun bir yöntemdir.

Bulaşıcı hastalıkların kontrolü ve yayılmasını analiz etmek için matematik modellemeleri önemli araç olmuştur. Matematik modelleri doğanın dilinin hassas matematik

dile çevrilmesidir. Bu bağlamda matematiksel modeller ilk olarak 18 .yy da, dinamik sistem yaklaşımları ise 19.yy ın başlarında kullanılmaya başlamıştır. Bu alanda birçok çalışma yapılmıştır.Örneğin; Kermack ve McKendrick yapmış oldukları çalışmalarda bir toplumun başlangıçta tüm bireylerin belirli bir hastalığa karşı bağışıklıklarının olmadıklarını ve hastalığa yakalanma potansiyeline sahip oldukları ve bir kez hastalığı geçiren bireylerin hastalığa karşı bağışıklık kazandığı varsayımını yapmıştır. Burada çeşitli varsayımlar altında literatürde SIR modeli olarak bilinen bir model oluşturulmuştur ve farklı modellerin geliştirilmesine önayak olmuştur . (Bailey, 1975 ; Anderson ve May, 1991 ; Hethcote, 2000 ;Nars vd.,2006 ; Keeling ve Rohani, 2008). Granish ve arkadaşları ise HIV model analizi yapmıştır ve salgını yok etmek için HIV virüsüne karşı tedavi sürecini izleyen evrensel HIV testini ileri sürmüşlerdir(Granish vd., 2008). Ayrıca Wang ve arkadaşları ise Hepatit B hastalığı için kontrol medelleri öne sürdü ve Hepatit B ye bağlı ölümlerin azalabileceğini iddia ettiler (Wang vd., 2010).

Optimal kontrol teori matematiğin diğer bir alanıdırki bu kapsamlı olarak bulaşıcı hastalıkların yayılmasının kontrolünde ve karmaşık biyolojik durumlarında gerekli planlamanın yapılması ve doğru kararlar alınabilmesi için kullanılır. Burada Pontryagin Maksimum Prensibi olarak bilinen teoremden yararlanılmaktadır. Bu teorem optimal kontrolün varlığı için gerek ve yeter şart olarak değerlendirilir. Bu genellikle aşılama ve ilaçla tedavi yöntemleri ile çoğu hastalığın yayılmasının kontrolünde kullanılmaktadır (Fleming ve Rishel, 1975). Örneğin,Graff ve Schaefer' in çalışmalarında aşı ve tedavi kontrol ölçeklerini kullanarak hastalanan bireylerin sayısını azaltmak için optimal kontrol teorisini uyguladılar(Yusuf ve Benyah ,2012 : Gaff ve Schaefer,2009).Zaman ve arkadaşları ise sadece aşılama ile bir SIR modelinin kontrolüne ilişkin incelemeler yapmıştır(Zaman vd., 2008). Kirschner ve arkadaşları da HIV virüsü taşıyan bireylere virüse karşı ilaçların verilerek en uygun tedavi yönteme karar vermek için optimal kontrol teorisi kullanmışlardır (Kirschner vd., 2007). Fisher ve Denelly ise kanser tedavisi gören hastaların tümör hücrelerini yok etmesi durumuna karar vermek için optimal kontrol teorisi kullanmışlardır(Fisher ve Dennely, 2005).

Birinci bölümünde tezde kullanılacak bazı matematiksel kavramlar, tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde , SIR modelinin aşılama ve tedavi kontrolü ile kurulması, modellenmesi,denge noktalarının bulunmasına (kararlılığın incelenmesi) yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde , SIR modeli için optimal kontrol problemi, aşılama ve tedavi kontrolü parametreleri ile oluşturulması ve problemin çözümü, Pontryagin maksimum prensibi ile bulunmasıdır.

Dördüncü bölümde, optimal çözümün yaklaşık hesaplanabilmesi için kullanılacak nümerik çözüm oluşturulmuştur. Optimal aşılama ve tedavi kontrolü altında elde edilen çözümler grefikler yardımıyla yorumlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Kararlılık Analizi

Tanım 2.1. K kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesi, $y \in K \subset \mathbb{R}^n$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ *ve* $f(t, y)$ vektör alanı olmak üzere birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemi,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Her $t \in I$ için (2.1) denklemini sağlayan $y = y(t)$ fonksiyonlarına denklem sisteminin çözümü denir.(Arrowsmith ve Place, 1986)

Tanım 2.2. $y \in K \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $B = \mathbb{R} \times K$ olmak üzere,

$$\dot{y} = Y(y) \tag{2.2}$$

diferansiyel denklem sistemine otonom denklem sistemi denir. Burada Y sadece y değişkenine bağlıdır, t değişkeni açıkça denklemde görülmez.(Wiggins, 1990)

2.2. Otonom Sistemler

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, Y(y) \quad \mathbb{R}^3$ de bir vektör alanı olmak üzere,

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = Y(y)$$

diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Y_1(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y}_2 &= Y_2(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y}_3 &= Y_3(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. $t \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ fonksiyonu (2.3) denklem sisteminin çözümü olsun. $\forall t \in I$ için bu çözümlerin yer aldığı $y_1 y_2 y_3$ uzayına (2.3) sisteminin faz uzayı denir.

Tanım 2.3. (2.3) sisteminin denge noktaları, $Y_1(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$, $Y_2(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$ ve $Y_3(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$ eşitliklerini sağlayan $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ noktasıdır. (2.3) denklem sistemimizdeki Y_1,Y_2 ve Y_3 fonksiyonları lineer olarak göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \\ \dot{y}_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \\ \dot{y}_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilebilir.Bu şekilde ifade edilen lineer sistemin çözümü $(0, 0, 0)$ denge noktasıdır. (2.4) sistemimizin matris formu,

$$\dot{y} = By \tag{2.5}$$

olarak yazılır. Burada $B = (b_{ij})$, 3×3 tipinde bir katsayı matrisidir. C bilinmeyen sabit vektör olmak üzere (2.4) sisteminin

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \tag{2.6}$$

formundaki çözümünü araştıralım. (2.6) çözümünü (2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$C\lambda e^{\lambda t} = BCe^{\lambda t} \Leftrightarrow (B - \lambda I)C = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde bir özdeğer problemine ulaşılır.(2.7) eşitliğinin var olabilmesi için

$$det(B - \lambda I) = 0 \tag{2.8}$$

olmalıdır.(2.8)eşitliğini sağlayan λ sayıları, B matrisinin özdeğerleri olarak ifade edilir. (2.8) eşitliğinde λ nın cebirsel denklemi ,

$$det \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

olmak üzere

$$P(\lambda) = \lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0 \tag{2.10}$$

kuadratik denklem elde edilir.Buna sistemin karakteristik denklemi adı verilir. Burada $cof(b_{ij})$, matriste b_{ij} elemanının kofaktörünü göstermek üzere ve $tr(B)$ matrisin izi olmak üzere, karakteristik denklemin katsayıları

$$\begin{aligned} c &= -tr(B) \\ d &= cof(b_{11}) + cof(b_{22}) + cof(b_{33}) \\ e &= -det(B) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$P(\lambda)$ karakteristik denkleminin köklerinin durumu sistemin çözümünün belirlenmesinde kullanıldığı gibi, çözümün analitik olarak belirlenmesinin zor olduğu durumlarda da çözümü bulmadan çözümle ilgili bazı yorumların yapılabilmesine olanak sağlar.

2.3. Denge Noktalarının Sınıflandırılması

Bir lineer sistem, tek bir denge noktasına sahip olacağı için sistem ile kritik noktanın kararlılık tipi aynıdır. Bir kritik noktanın üç farklı kararlılık tipinden söz edebilir. Bunlar kararlı, kararsız ve asimptotik kararlı olma durumlarıdır.

Tanım 2.4. $\dot{y} = Y(y)$ sisteminin denge noktası y^* olsun.Burada $y(t, y_0)$ sistemin $y(0) = y_0$ başlangıç noktasından çıkan çözümünü göstermektedir.Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayı için;

$$\|y_0 - y^*\| < \delta \quad \rightarrow \quad \|y(t, y_0) - y^*\| < \varepsilon, \quad t > 0$$

koşulunu sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ noktası var ise , y^* noktasına kararlı denge noktası denir (Allen,2007).

Tanım 2.5. $\dot{y} = Y(y)$ sisteminin denge noktası y^* olsun. Eğer denge noktası kararlı değilse kararsızdır (Allen,2007).

Tanım 2.6. $\dot{y} = Y(y)$ sisteminin denge noktası y^* olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayı için;

$$\|y_0 - y^*\| \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir y_0 başlangıç noktası için

$$y(t, y_0) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

sağlanıyorsa y^* noktasına asimptotik kararlı denge noktası denir (Allen,2007).

2.4. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Kararlılık Analizi

Lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleriyle ifade edilen sistemlerin tam çözümlerinin bulunması genellikle güçtür. Bu nedenle bir sistemi çözmeden önce sistemin çözümünün faz şekilleri ve kararlılığı hakkında bilgi sahibi olmak önemlidir. Lineer sistemlerin çözümleri ile lineer olmayan sistemlerin çözümleri arasında çoğunlukla bir ilişki vardır. Bu ilişki sayesinde bazı durumlar hariç genellikle lineer olmayan sistemi çözmeden, lineerleştirerek çözümü hakkında bilgi sahibi olunabilir.

Tanım 2.7. Orjinde denge noktasına sahip lineer olmayan,

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= K(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y_2} &= L(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y_3} &= M(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{2.11}$$

sistemini ele alalım.Burada K, L ve M fonksiyonları $\forall(y_1, y_2, y_3)$ için sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevlenebilen fonksiyonlardır.
Eğer (2.11) sistemi

$$\begin{aligned} K(y_1, y_2, y_3) &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + K_1(y_1, y_2, y_3) \\ L(y_1, y_2, y_3) &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + L_1(y_1, y_2, y_3) \\ M(y_1, y_2, y_3) &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + M_1(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabiliyorsa ve,

$$\begin{aligned} \lim_{(y_1,y_2,y_3)\to(0,0,0)} \frac{K_1(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} &= \lim_{(y_1,y_2,y_3)\to(0,0,0)} \frac{L_1(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \\ &= \lim_{(y_1,y_2,y_3)\to(0,0,0)} \frac{M_1(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

oluyorsa,

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \\ \dot{y_2} &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \\ \dot{y_3} &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{aligned} \tag{2.14}$$

sistemine orjinde (2.11) sisteminin lineerleştirilmiş sistemi denir.

2.5. Lineer Olmayan Sistemlerin Denge Noktalarının Kararlılığı

Teorem 2.8. (2.11) sistemi ve bunun lineerleştirilmiş hali olan (2.14) sistemleri orijinde denge noktasına sahip olsunlar.λ_1,λ_2 ve λ_3 (2.14) sisteminin özdeğerleri olsun.Bu durumda,

- λ_1,λ_2 ve λ_3 özdeğerleri negatif reel sayı ya da reel kısımları negatif olan kompleks sayı ise bu durumda orijin denge noktası hem (2.14) sistemi hem de (2.12) sisteminin asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

- λ_1,λ_2 ve λ_3 özdeğerleri pozitif reel sayı ya da reel kısımları pozitif olan kompleks sayı ise, orijin denge noktası (2.12) ve (2.14) sistemleri için kararsız bir denge noktasıdır.

- λ_1 , λ_2 ve λ_3 özdeğerlerinden en az birinin reel kısmı sıfır ise orijin denge noktası (2.14) sisteminin kararlı denge noktası olmasına rağmen (2.12) sisteminin asimptotik kararlı, kararlı ya da kararsız denge noktası olabilir.

Lineer olmayan bir sistemin her bir kritik noktasındaki yapı ve kararlılık durumu bu sistemin lineerleştirilmesi ile genellikle tam olarak belirlenebilir. Fakat bazı durumlarda kullanılamaz. Bu durumlar da lineer olmayan sistemlerin kararlılığını belirlemekte bir başka yol olarak Liapunov direkt metodu kullanılır (Allen,2007).

2.6. LYAPUNOV Direkt Metodu

Orijinde denge noktasına sahip lineer olmayan,

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= K(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y_2} &= L(y_1, y_2, y_3) \\ \dot{y_3} &= M(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{2.15}$$

sistemini ele alalım. Burada K,L ve M her (y_1, y_2, y_3) için sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevlenebilen fonksiyonlardır. Şimdi (2.15) sisteminin kararlılığını Lyapunov'un direkt metodu ile incelemek için gerekli olan tanımları verelim.

Tanım 2.9. $V(y_1, y_2, y_3)$,fonksiyonu $(0, 0, 0)$ ı içeren bir B bölgesinde birinci mertebeden kısmi türevli fonksiyon olsun.

- Eğer $V(0, 0, 0) = 0$ ve B bölgesinde $(0, 0, 0)$ dışında $\forall(y_1, y_2, y_3)$ için $V(y_1, y_2, y_3) > 0$ oluyorsa, V fonksiyonuna B de pozitif tanımlıdır denir.
- Eğer $V(0, 0, 0) = 0$ ve B bölgesinde $(0, 0, 0)$ dışında $\forall(y_1, y_2, y_3)$ için $V(y_1, y_2, y_3) \geq 0$ oluyorsa, V fonksiyonuna B de yarı pozitif tanımlıdır denir.
- Eğer $V(0, 0, 0) = 0$ ve B bölgesinde $(0, 0, 0)$ dışında $\forall(y_1, y_2, y_3)$ için $V(y_1, y_2, y_3) < 0$ oluyorsa, V fonksiyonuna B de negatif tanımlı tanımlıdır denir.
- Eğer $V(0, 0, 0) = 0$ ve B bölgesinde $(0, 0, 0)$ dışında $\forall(y_1, y_2, y_3)$ için $V(y_1, y_2, y_3) \leq 0$ oluyorsa, V fonksiyonuna B de yarı negatif tanımlıdır denir(Arrowsmith,1986).

Tanım 2.10.

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = (0, 0, 0)$$

(2.15) sisteminin kritik noktası olsun.

- Eğer orijini içeren bir B bölgesindeki her $\mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{y}}$ için $V(\mathbf{y}) > 0$ ve $V(\tilde{\mathbf{y}}) = 0$. (V pozitif tanımlı)
- Her $\mathbf{y}$ için $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$ fonksiyonu yarı negatif tanımlı ise bu şartları sağlayan $V(\mathbf{y}) = V(y_1, y_2, y_3)$ fonksiyona (2.15) sistemi için bir lyapunov fonksiyonu denir.

Teorem 2.11. (**Lyapunov'un Direkt Metodu**)
(2.15) sistemini göz önüne alalım.B , sistemin (0,0,0) kritik noktasını içeren $\mathbb{R}^3$ de açık bir küme olsun.Ayrıca $V(y_1, y_2, y_3)$ bir lyapunov fonksiyonu olsun.Bu durumda,

- Eğer $\forall(y_1, y_2, y_3) \in B$ için $\dot{V}(y_1, y_2, y_3) \leq 0$ ise ,(0,0,0) kararlı,

- Eğer $\forall(y_1, y_2, y_3) \in B - \{(0, 0, 0)\}$ için $\dot{V}(y_1, y_2, y_3) < 0$ ise, (0,0,0) asimptotik kararlı,

- Eğer $\forall(y_1, y_2, y_3) \in B - \{(0, 0, 0)\}$ için $\dot{V}(y_1, y_2, y_3) > 0$ ise, (0,0,0) kararsızdır.(Allen,2007)

Tanım 2.12. (**İnvaryant Küme**)

$$\dot{y} = f(y) \tag{2.16}$$

sistemi verilsin. $D \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

i-) $y(0) \in D \Rightarrow y(t) \in D$, $(\forall t \in \mathbb{R})$ ise D kümesi (2.16) sistemine göre invaryant,

ii-) $y(0) \in D \Rightarrow y(t) \in D$, $(\forall t \geq 0)$ ise D kümesine, (2.16) sistemine göre pozitif invaryanttır denir.

Teorem 2.13. (**La-Salle invaryantlık Prensibi**)
$\dot{y} = f(y)$ sistemi verilsin. $\Omega \subset B$ bu sisteme göre pozitif invaryant, kompakt küme, $V : B \to \mathbb{R}$ C^1 sınıfından bir fonksiyon ve her $y \in \Omega$ için $\dot{V(y)} \leq 0$ olsun. $E = \{y \in \Omega \mid \dot{V(y)} = 0\}$ biçiminde tanımlı küme olmak üzere, $\dot{y} = f(y)$ sisteminin tüm çözümleri, E'nin alt kümesi olan en geniş pozitif invaryant kümeye yakınsar (Lasalle, 1976).

Tanım 2.14. $(A)_{nxn}$ matrisi verilsin. Matrisin aynı sayıda $(n-k)$ satır ve $(n-k)$ sütünun silinmesi ile elde edilen alt matrisin determinantına k mertebeden "esas minör" adı verilir. Matrisin son $(n-k)$ satır ve sütünün silinmesi ile elde edilen alt matrisin determinanta ise k. mertebeden "temel esas minörü" adı verilir.

Not: $(A)_{nxn}$ matrisinin k. mertebeden esas minörünü Δ_k ile , k.mertebeden temel esas minörünü D_k ile gösterelim. k. mertebeden esas minör sayısı $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ dır.

Örnek : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Bu matrisin esas minörünü ve temel esas minörünü bulunuz.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -109$$

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -30, \qquad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$\Delta_1^1 = 1 \quad , \quad \Delta_1^2 = 2 \quad , \quad \Delta_1^3 = 6$$

$$D_1 = 1 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14 \quad , \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -109$$

Teorem 2.15. $(A)_{nxn}$ simetrik matris olsun .

i-) A pozitif tanımlı $\Leftrightarrow \forall k = 1, 2....n \Rightarrow D_k > 0$

ii-) A negatif tanımlı $\Leftrightarrow \forall k = 1, 2....n \Rightarrow (-1)^k D_k > 0$

iii-) A yarı pozitif tanımlı$\Leftrightarrow \forall k = 1, 2....n \Rightarrow \Delta_k \geq 0$

iv-) A yarı negatif tanımlı $\Leftrightarrow \forall k = 1, 2....n \Rightarrow (-1)^k \Delta_k \geq 0$

Not: (iii) ve (iv) durumlarında $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ tane esas minör mevcut olduğundan bu minörlerin her birinin verilen şartı sağlaması gerekmektedir.Bu kriterlerden hiçbiri gerçekleşmiyorsa A matrisine "tanımsız" denilir.

Tanım 2.16. **(Hessian Matrisi)**
$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olsun. Herhangi bir $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ için hessian matrisi $H(\mathbf{y})$ ile gösterilir.

$$H(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{y}) & f_{11}(\mathbf{y}) & \dots & \dots & \dots & f_{1n}(\mathbf{y}) \\ f_{21}(\mathbf{y}) & f_{22}(\mathbf{y}) & \dots & \dots & \dots & f_{2n}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{y}) & f_{n2}(\mathbf{y}) & \dots & \dots & \dots & f_{nn}(\mathbf{y}) \\ \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f_{ij}(\mathbf{y})$, önce i. bileşene ve daha sonra j.bileşene göre alınan ikinci mertebeden türevi göstermektedir.

Örnek : $f(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2 - y_1 y_2$ fonksiyonu için $\forall(y_1, y_2)$ noktasında

$$f_{11}(y_1, y_2) = 2$$

$$f_{12}(y_1, y_2) = -1$$

$$f_{21}(y_1, y_2) = -1$$

$$f_{22}(y_1, y_2) = -2$$

olduğundan

$$H(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

Teorem 2.17. f($\mathbf{y}$), 2.mertebeden sürekli türevlenebilir ise Hessian matrisi simetrik matristir.

Tanım 2.18. **(Konveks Küme)**
$C \in \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin.$\forall x, y \in C$ için ve keyfi $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C$ ise , C kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.19. **(Konveks Fonksiyon)**
$C \in \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $f(\cdot) : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer keyfi $x, y \in C$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon,

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

eşitsizliği sağlıyorsa kesin konveks fonksiyon denir.

Teorem 2.20. $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $C^\circ \neq \emptyset$ olsun. $f(\cdot) : C \to \mathbb{R}$ sürekli ve $f(\cdot)$, C° da ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda $f(\cdot)$ ' ın C° da konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall \mathbf{y} \in C^\circ$ için $\mathrm{H}(\mathbf{y})$ matrisinin yarı pozitif tanımlı olmasıdır. Burada C° ile C kümesinin içi gösterilmektedir (Sydsaeter ve Hamman,1995).

Not: Bu önerme $f(\cdot)$ fonksiyonunun sadece C° de konveks olmasını karaketrize etmektedir. Dolayısıyla C kümesinin kapalı bir küme olması durumunda $f(\cdot)$ ' ın tüm C kümesi üzerinde konveks fonksiyon olması söylenemez.

Bu durumda aşağıdaki önerme kullanılabilir.

Önerme 2.21. $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $C^\circ \neq \emptyset$ olsun. $f(\cdot) : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve C°de konveks ise bu durumda C'de konvekstir.

Tanım 2.22. **(Lokal Lipschitz)**
$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.$y_0 \in \mathbb{R}^n$ için $\exists K = K(Y_0) \geq 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabiliyor öyleki her $x, y \in B(y_0)$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K.\|x - y\| \tag{2.17}$$

oluyorsa f(y) fonksiyonu $y_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında Lipschitzdir denir.

$D \subset \mathbb{R}^n$ ve her $y_0 \in D$ için $f(y)$ fonksiyonu Lipschtz ise f(y) fonksiyonuna y üzerinde Lokal Lipschitz denir.

$f(t, y) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, t_f]$ ve her $y_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ için (2.17) koşulunu sağlıyora , D kümesi üzerinde y'e göre Lokal Lipschtz fonksiyonu denir.

Tanım 2.23. **(Global Lipschitz)**
$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.keyfi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\exists K \geq 0$ sayısı mevcut öyleki

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K.\|x - y\| \tag{2.18}$$

oluyorsa f(y) fonksiyonu Global Lipschitz denir.

$f(t,y) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, t_f]$ ve her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için (2.18) koşulunu sağlıyora , $f(t,y)$ fonksiyonuna y'e göre Global Lipschtz fonksiyonu denir.

Teorem 2.24. $f(t,y)$ fonksiyonu t'ye göre parçalı sürekli ve $y_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasından keyfi sabitlenmiş bir $t \in [t_0, t_f]$ için Lipschtz olsun. Bu durumda öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.19}$$

sisteminin $[t_0, t_0 + \delta]$ aralığında tek bir çözümü vardır(Arrowsmith,1986).

Örnek :

$$\begin{cases} \dot{y} &= y^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

sistemini ele alalım.$y(t) = \dfrac{t^3}{27}$ bu sistemin bir çözümüdür. Ancak çözüm tek değildir. $y(t) = 0$ da bu sistemin bir çözümüdür.

Not: $f(t,y) = y^{2/3}$ fonksiyonu , $0 \in D$ olmak üzere , $[0, \infty) \times D$ biçimindeki herhangi bir kümede $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sınırsız olacağından Lipschtz olamaz.

Örnek :

$$\begin{cases} \dot{y} &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

sistemini düşünelim. $f(t,y) = y^2, \mathbb{R}$'de Lokal Lipschitzdir. Dolayısıyla herhangi bir kompakt alt kümede Lipschtzdir. $(0,1)$ noktasından geçen tek çözüm $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ dir.

Ancak bu çözüm $[0,1)$ aralığında mevcuttur. $t \to 1$ için $y(t)$ çözümü herhangi bir kompakt küme içinde kalmaz.

Sistemin çözümlerinin bir $[t_0, t_f]$ aralığında devam ettirilebilmesi için global Lipschitz olma koşulu gereklidir.

Teorem 2.25. (Global Varlık - Teklik Teoremi)
$f(t,y)$ fonksiyonu t'ye göre parçalı sürekli ve keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, t_f]$ için y'e göre global Lipschtz olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.22}$$

sisteminin $[t_0, t_f]$ aralığı üzerinde tek bir çözümü vardır(Arrowsmith,1986).

Örnek : $\dot{x} = A(t)x(t) + b(t)$ sistemini düşünelim. Burada $[A(t)]_{n\times n}$ matris fonksiyonu, $(b(t))_{n\times 1}$ skaler fonksiyon, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ dir. Keyfi $t \in [t_0, t_f]$ için $A(t)$ sınırlı olsun. Başka bir deyişle her $t \in [t_0, t_f]$ için $\|A(t)\| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda $t \in [t_0, t_f]$ keyfi sabitlenmiş iken $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\| &= \|A(t)x(t)\| \\ &\leq \|A(t)\|\|x - y\| \\ &\leq K.\|x - y\| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $f(t,y)$, y'e göre global Lipschtzdir. Bu durumda herhangi bir (t_0, y_0) noktasından geçen çözüm bir tanedir. Üstelik bu çözüm herhangi bir $[t_0, t_f]$ aralığında devam ettirilebilir.

Not: Global Lipschitzlik koşulu, Lokal Lipschitzliğe nazaran daha güçlü bir koşul olduğundan bu koşulu sağlanmadığı birçok durumla karşılaşılabilir. Bu hallerde aşağıdaki teorem kullanılabilir.

Teorem 2.26. $f(t,y)$ fonsiyonu t' ye göre parçalı sürekli, her $y \in D \subset \mathbb{R}$ ve her $t \geq t_0$ için y'e göre Lokal Lipschitz olsun. $\Omega \subset D$ kompakt alt küme ve $y_0 \in \Omega$ için

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

sisteminin tüm çözümleri tamamen Ω kümesi içerisinde kalıyor olsun.Bu durumda sistemin $t \geq t_0$ için devam ettirilebilen tek bir çözümü vardır (Arrowsmith,1986).

Örnek :

$$\begin{cases} \dot{y} &= -y^3 \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

sistemini düşünelim. $f(t,y) = -y^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde y'e göre Lokal Lipschitz olmasına rağmen $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3y^2$, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olmadığından Global Lipschitz değildir. Dolayısıyla Global Varlık - Teklik Teoremi kullanılamaz. Ancak $y(t) \geq 0 \Rightarrow \dot{y(t)} \leq 0$ ve $y(t) \leq 0$ için $\dot{y(t)} \geq 0$ olduğundan , $y_0 \in \Omega = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq |a|\}$ biçimindeki kompakt bir kümeden çıkan çözüm, yine tamamıyla Ω kümesi içerisinde kalır. O halde bir önceki önerme uyarınca sistemin $t \geq 0$ için devam ettirilebilen tek bir çözümü vardır.

2.7. Optimal Kontrol Problemi

$$\dot{y} = f(t,y,u) \tag{2.25}$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.26}$$

biçiminde verilen kontrol sistemini düşünelim.

Burada $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin faz vektörünü , $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ kontrol vektörünü , $t \in [0,T]$ zamanı göstermektedir. (2.25) sistemin sağ tarafında yer alan $f(t,y,u)$ foksiyonun sürekli ve y'e göre birinci mertebeden kısmi türevlerinin var ve sürekli olduğunu , $u = u(t)$ fonksiyonun da parçalı sürekli olduğunu düşünelim. Sistemin $t = 0$ anındaki başlangıç konumunu $\mathbf{y}_0$ ve $t = T$ terminal zamanı anındaki konumu da $\mathbf{y}_T$ ile gösterelim. Terminal zaman T, sabit veya serbest olabilir. Benzer şekilde terminal zamanı anındaki konum da serbest veya önceden belirlenmiş olabilir.

Verilen bir $u = u(t)$ kontrol fonksiyonu için $[0,T]$ aralığında (2.25) diferansiyel denklemini ve $y(0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözüme, y_0 başlangıç noktasından çıkan ve $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörünge denir.

Maliyet fonksiyonu,

$$J[t,y,u] = F(y_T) + \int_0^T L(t,y,u)dt \tag{2.27}$$

ile verilsin. Burada $F(y_T)$ fonksiyonu sistemin T-terminal anındaki durum vektörüne bağlı olan bir değerdir.

(2.25)-(2.26) sistemini y_0 noktasından Y_T noktasına getiren tüm $u(\cdot) \in U$ kontrol fonksiyonları içerisinde (2.27) fonksiyonelini minimum yapan kontrole optimal kontrol denilir.

Aşağıdaki teorem (2.25) - (2.26) - (2.27) ile verilen optimal kontrol probleminin varlığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.27. (**Optimal Kontrolün Varlığı**) (Fleming ve Rishel, 1975)

(2.25) - (2.26) - (2.27) ile verilen optimal kontrol problemini düşünelim.Her $y, y^{'} \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in U$ için

i-) $\|f(t,y,u)\| \leq c_1(1+\|y\|+\|u\|)$

ii-) $\|f(t,y,u)-f(t,y^{'},u)\| \leq c_2(\|y^{'}-y\|)(1+\|u\|)$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ sayıları var olsun. Diğer yandan $f(t,y,u)$ fonksiyonu katsayıları faz vektörüne bağlı olmak üzere kontrol vektörüne göre lineer $f(t,y,u) = \alpha(t,y) + \beta(t,y)u$ biçiminde yazılabiliyor olsun.

iii-) U kontrol kümesi ve durum uzayı boş kümeden farklı kompakt küme olsun.

iv-) U kontrol kümesi konveks ve $L(t,y,u)$, U üzerinde konveks fonksiyon olsun.

v-) $\alpha(y,u) \geq k_1\|u\|^p - k_2$ eşitsizliği sağlanacak biçimde $k_1 > 0$ $k_2 > 0$, $p > 1$ sabitleri var olsun.

Bu durumda (2.25)-(2.26) -(2.27) optimal kontrol probleminin bir çözümü vardır.

NOT:Sistem otonom ise başka bir deyişle sistem $\dot{y} = f(y,u)$ biçiminde ise $f(y,u)$ fonksiyonu y'e ve u' ya göre kısmi türevlerinin sınırlı olması durumunda $(i-)$ ve $(ii-)$ koşulları aşikar olarak sağlanacaktır.

$$(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$$

vektör değerli fonksiyonunu tanımlayalım. Bu biçimde tanımlanan katsayı ifadesi adjoint değişken olarak adlandırılacaktır.

$$H(\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Hamiltonian fonksiyonu H,

$$H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 L(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) + \lambda f(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})$$

biçimde tanımlayalım. Bu durumda (2.25) - (2.26) - (2.27) optimal kontrol probleminin bir $u^*(\cdot)$ optimal çözümü için yeterli koşulu karakterize eden bir teorem verelim.

Teorem 2.28. (**Pontryagin Maksimum Prensibi**)
$u^*(\cdot)$, (2.25) - (2.26) - (2.27) kontrol probleminin optimal çözümü , $y^*(\cdot)$ bu kontrole karşılık gelen yörünge olsun. Bu durumda öyle $(\lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ adjoint değişkenleri vardır ki

$$a)\ \lambda_0^* = 1, \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$$

$$b1)\ H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}, \lambda_0^*(t), \lambda^*(t))$$

$$b2)\ \dot{\lambda_i}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_i} H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)), \quad \text{h.h} \quad t \in [0, T]$$

$$b3)\ \lambda_i(T) = \lambda_0^* \frac{\partial F}{\partial y_i}(y^*(T))$$

koşulları sağlanır.

NOT:Literatürde Pontryagin maksimum prensibi olarak geçen önerme (2.25) - (2.26) - (2.27) optimal kontrol problemine uygun biçimde verilmiş olup, uğraşılan problemdeki zamanın serbest-sabit olmasına , maliyet fonksiyonunun değişik biçimlerine ve çeşitli faz kısıtlamalarına bağlı olarak değişkenlik göstermektedir. Önermede b1) ile ifade edilen koşul Pontryagin maksimum prensibi , b2) ile ifade edilen adjoint denklem , b3) ise transversality koşulu olarak adlandırılmaktadır.

NOT:Sistem otonom olduğu durumda b1) koşulu yerine

$$\frac{\partial H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t))}{\partial u} = 0, \tag{2.28}$$

eşitliği gelebilir.Diğer yandan

$$\left.\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} \geq 0$$

koşulu minimum olması durumunda sağlanmalıdır.

3. SIR MODELİ

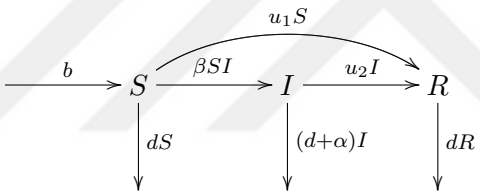
3.1. SIR Modelinin Kurulumu

Bir topluluktaki popülasyonun , herhangi bir t - zamanı anında ,

$S(t)$:Başlangıçta sağlıklı olup daha sonra hastalığa karşı duyarlı olan bireyler,yani hassas bireyler.

$I(t)$:Hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireyler ,yani enfektif bireyler.

$R(t)$:İyileşmiş ve kalıcı olarak bağışıklık kazanmış bireyler olmak üzere üç ana grupta toplandıklarını düşünelim.Popülasyonda dışardan göçler , doğumlar , dışarıya göçler ve ölümlerin etkili olduğunu dolayısıyla nüfusun değişken olduğu ; ayrıca popülasyonun homojen olduğu yani her bir bireyin birbiri ile temasının eşit olasılıkla gerçekleştiği varsayılmaktadır.Popülasyondaki gruplar arasındaki geçişi betimleyen diyagram aşağıdaki gibi olsun.



Burada,

b:Populasyona katılım oranı(Doğum yada iç göç ile populasyona katılan duyarlıların oranı)

β: Bulaşma oranını,

d: Doğal ölüm oranını,

α : hastalık nedenli gerçekleşen ölüm oranını,

u_1 : herhangi bir t zamanı anında hastalığa karşı duyarlı bireylere (S) uygulanacak aşılama oranını ,

u_2 : herhangi bir t - zamanı anında hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireylerin (I) tedavi kontrol oranını göstermektedir.

Bu varsayımlar altında,

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - dS - u_1 S \\ I' &= \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I \\ R' &= u_1 S + u_2 I - dR \end{cases} \tag{3.1}$$

sistemi elde edilmiş olur.

Parametreler pozitif sabitlerdir ve değişkenler negatif değer alamazlar ve şimdi oluşturulan modeli açıklayalım.

βSI , Bulaşıcı hastalığa sahip , bulaştırıcı bireyler tarafından duyarlı bireylere β bulaşma oranıyla geçirilen hastaların sayısıdır. (3.1) sistemindeki 1. denklemden enfekte bireyler popülasyondaki sağlıklı bireylerin sayısında bir azalmaya yol açacağından, sağlıklı bireyler sayısındaki değişim modelde -βSI şeklinde olacaktır. Aynı şekilde doğal yolla ölen bireyler $(-dS)$ ve hastalık bulaşma olasılığı olan duyarlı bireylere (S) uygulanan aşılama ile $(-u_1 S)$ miktarından hassas sınıfın eleman sayısında eksilme meydana gelecektir. Buna göre,

$$S^{'} = b - \beta SI - dS - u_1 S$$

olur.

(3.1) sistemindeki 2. denklemde ise sağlıklı bireylerin, enfektelerle teması sonucunda ortaya çıkan enfekte miktarı, hasta birey sayısında artmaya yol açacak ve 1. gruptan çıkarılan βSI 2. gruba eklenecektir. Bunun yanısıra doğal ölen bireyler $(-dI)$, hastalıklı ölen bireyler $(-\alpha I)$ ve hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip (I) bireylere uygulanan tedavi ile $(-u_2 I)$ enfektif grubun elemanı olmaktan çıkmışlardır. Böylece,

$$I^{'} = \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I$$

olur.

(3.1) sistemindeki 3. denklemde ise aşı uygulanmış duyarlı bireyler $(u_1 S)$ ve tedavi edilmiş enfekte bireyler $(u_2 I)$ hastalıktan iyileşen grubuna dahil olurlar.Bu gruptan da doğal ölen bireylerin $(-dR)$ çıkışı olacaktır. Buradan da (3.1) sisteminin son denklemi

$$R^{'} = u_1 S + u_2 I - dR$$

biçiminde elde edilmiş olur.

Tedavisi veya aşısı olan hastalıklarda bile toplumun her kesimine ulaşmak mümkün olmadığından ölümler gerçekleşmektedir. Burada çeşitli varsayımlar altında literatürde SIR modeli olarak bilinen bir model oluşturulmuştur. Modelde Aşı yada tedavi sonrası iyileşen bireylerin hastalığa karşı kalıcı bağışıklık kazandıkları dolayısıyla R alt grubundan S alt grubuna geçişin mümkün olmadığı varsayılmıştır.Bu açıdan model su çiçeği , kızamık, veba vb. hastalıklara uygulanabilir.

Toplam populasyon $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ ile gösterilirse,

$$\begin{cases} N^{'} &= S^{'} + I^{'} + R^{'} \quad R = N - S - I \\ &= b - \beta SI - dS - u_1 S + \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I + u_1 S + u_2 I - dR \\ &= b - d(S + I + R) - \alpha I \\ N^{'} &= b - dN - \alpha I \end{cases}$$

elde edelir.Dolayısıyla,

$$N^{'}(t) \neq 0$$

olduğundan toplam popülasyonun sabit olmadığı görülmektedir.

Herhangi bir t - zamanı anındaki tedavi edilmiş bireylerin sayısını gösteren $R(t)$, (3.1) sisteminde ilk iki eşitlikte görülmediğinden $R(t)$ yerine toplam nüfusu gösteren $N(t)$ kullanılarak ,

$$\begin{cases} S^{'} &= b - \beta SI - dS - u_1 S \\ I^{'} &= \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I \\ N^{'} &= b - dN - \alpha I \end{cases} \tag{3.2}$$

sistemi de incelenebilir.

Önerme 3.1. $\Omega = \{(S, I, N) \in R^3_+ : S \geq 0, I \geq 0, N \geq 0, S + I \leq \ N \leq \frac{b}{d}\}$ kümesi (3.2) sistemi üzerinde pozitif invaryanttır .

İspat : Keyfi bir $(S(0), I(0), N(0)) \in \Omega$ başlangıç değeri için alındağında sistemin tüm çözümlerini, her $t \geq 0$ iken $(S(t), I(t), N(t)) \in \Omega$ olduğunu gösterelim. (3.2) sisteminin tüm çözümleri sürekli olduğundan, çözümlerin negatif olmadan evvel 0 değerini almaları gereklidir. $S^{'} = \ b - \beta SI - dS - u_1 S$ denkleminde herhangi bir $t = t_1 > 0$ anında $S = 0$ olduğu durumda $S^{'} = \ b$ olur . Burada b pozitif olduğundan $S^{'}$ de pozitif olur bu da $S^{'} \geq 0$ olduğunu başka bir deyişle her $t > 0$ için $S(t) \geq 0$ olduğunu ifade eder . Aynı şekilde $I^{'} = \ \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I$ denkleminde herhangi bir t anında $I = 0$ olur. Buradan

da $I^{'} = 0$ olur ki sistem bu durumda denge halinde olacak ve $I(t) = 0$ olarak kalacaktır. Dolayısıyla her $t > 0$ için $I(t) \geq 0$ dır . Benzer olarak $R^{'} = u_1 S + u_2 I - dR$ denkleminde de $R = 0$ olduğunda $R^{'} = u_1 S + u_2 I = 0$ olup , $t > 0$ için $S(t), I(t) \geq 0$ ve $0 \leq u_1(t) \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$ olduğundan $R^{'}(t) \geq 0$ bulunur. Buradan da her $t \geq 0 \Rightarrow R(t) \geq 0$ elde edilir.

$\forall t \geq 0$ için

$$S(t), I(t), R(t) \geq 0$$

$$S + I \leq N$$

olur.Diğer yandan (3.2)sisteminden, $\alpha > 0$ ve her $t \geq 0$ için $I(t) \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = b - Nd - \alpha I &\leq b - Nd \\ \frac{dN}{dt} &\leq b - Nd \\ \frac{dN}{dt} + Nd &\leq b \end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafını e^{dt} ile çarparsak,

$$\begin{aligned} e^{dt}.\frac{dN}{dt} + e^{dt}.N.d &\leq b.e^{dt} \\ \frac{d}{dt}[e^{dt}.N] &\leq b.e^{dt} \\ e^{dt}.N(t) &\leq \int e^{dt}.b.dt + c \\ N(t) &\leq e^{-dt}[\frac{e^{dt}b}{d} + c] \\ N(t) &\leq \frac{b}{d} + c.e^{-dt} \end{aligned}$$

$t \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to\infty} \sup N(t) \leq \frac{b}{d}$$

olur.

Başka bir değişle $\forall t \geq 0 \Rightarrow N(t) \leq \frac{b}{d}$ olur.Bu ise önermenin ispatını verir.

SIR SİSTEMİNİN DENGE NOKTALARI: (3.2) sistemi

$$\begin{aligned} f(S,I,N) &= b-\beta SI-dS-u_1S \\ g(S,I,N) &= \beta SI-u_2I-dI-\alpha I \\ h(S,I,N) &= b-dN-\alpha I \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S' &= f(S,I,N) \\ I' &= g(S,I,N) \\ N' &= h(S,I,N) \end{aligned}$$

biçiminde yazılsın. Sistemin denge noktaları

$$\begin{bmatrix} f(S,I,N) \\ g(S,I,N) \\ h(S,I,N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan noktalar olacaktır.

$$\begin{aligned} g(S,I,N)=0 &\iff I.(\beta S-u_2-d-\alpha)=0 \\ &\iff I=0 \quad veya \quad \beta S-u_2-d-\alpha=0 \end{aligned}$$

olduğundan sistemin denge noktaları iki grupta belirlenebilir. Bunlardan birincisi enfeksiyonlu bireylerin sayısının $I=0$ olması halindeki hastalıktan bağımsız (HB) denge noktası (S^0,I^0,N^0) ve ikincisi de $I\neq 0$ durumunda oluşacak olan endemik (EN) denge noktası (S^*,I^*,N^*) dır.

1.) Hastalıktan bağımsız denge noktası $I^0=0$ için ,(3.2) sistemindeki 2. denklemde aşikar olarak, $g(S,I,N)=I.(\beta S-u_2-d-\alpha)=0$ olduğu görülmektedir.

Diğer yandan $I=0\Rightarrow f(S,I,N)=0$ eşitliğinden,

$$\begin{cases} b-\beta SI-dS-u_1S &= 0 \\ b-dS-u_1S &= 0 \\ S(u_1+d) &= b \\ S=\frac{b}{d+u_1} & \end{cases}$$

olup burada $S^0=\dfrac{b}{d+u_1}$ bulunur.

Sonra (3.2) sistemindeki 3. denklem değerlendirilirse , $I=0$ için

$$\begin{cases} b-Nd-dI &= 0 \\ b-Nd &= 0 \\ Nd &= b \\ N &= \frac{b}{d} \end{cases}$$

elde edilir.Dolayısıyla $N^0=\dfrac{b}{d}$ bulunur.

Sonuç olarak, Hastalıktan bağımsız denge noktaları,

$$\varepsilon_0=(S^0,I^0,N^0)=(\frac{b}{d+u_1},0,\frac{b}{d})$$

şeklinde bulunmuş olur.

2.) $I\neq 0$ durumunda oluşacak olan endemik denge noktalarını (EN)

$$\varepsilon_1=(S^*,I^*,N^*)$$

bulalım.(3.2)sistemindeki 2. denklemden

$$\begin{cases} I[\beta S-(u_2+d+\alpha)] &= 0 \\ \beta S &= u_2+d+\alpha \\ S &= \frac{u_2+d+\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Burada $S^* = \dfrac{u_2 + d + \alpha}{\beta}$ bulunur.

Diğer taraftan (3.2) sistemindeki 1.eşitliği ele alalım.

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - dS - u_1 S \\ 0 &= b - \beta SI - dS - u_1 S \\ \beta SI &= b - S(d + u_1) \end{cases}$$

olur. Burada $S = S^* = \dfrac{u_2 + d + \alpha}{\beta}$ yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \beta(\tfrac{u_2+d+\alpha}{\beta})I &= b - \tfrac{u_2+d+\alpha}{\beta}(d + u_1) \\ \beta(\tfrac{u_2+d+\alpha}{\beta})I &= \frac{b\beta - (u_2 + d + \alpha)(d + u_1)}{\beta} \\ (u_2 + d + \alpha)I &= \frac{b\beta - (u_2 + d + \alpha)(d + u_1)}{\beta} \\ I^* &= \frac{b\beta - (u_2 + d + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$R_0 = \frac{b\beta}{(d + u_1).(u_2 + d + \alpha)}$$

denilir . I^* da R_0 yerine koyulursa

$$I^* = \frac{b\beta - (d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)} = (R_0 - 1)(\frac{d + u_1}{\beta})$$

elde ederiz.

Son olarak da (3.2) sistemindeki 3. denklemden,

$$\begin{cases} N' &= b - Nd - \alpha I \\ 0 &= b - Nd - \alpha I \\ Nd &= b - \alpha I \end{cases}$$

denkleminde

$$I = I^* = \frac{b\beta - (d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)}$$

ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Nd &= b - \alpha(\frac{b\beta - (d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)}) \\ Nd &= \frac{b\beta(d + u_2 + \alpha) - \alpha\beta b + \alpha(d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)} \\ N^* &= \frac{b\beta(d + u_2) + \alpha(d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{d\beta(d + u_2 + \alpha)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, Endemik denge noktaları,

$$\varepsilon_1 = (S^*, I^*, N^*)$$

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{u_2 + d + \alpha}{\beta} \\ I^* &= \frac{b\beta - (d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{\beta(d + u_2 + \alpha)} = (R_0 - 1)(\frac{d + u_1}{\beta}) \\ N^* &= \frac{b\beta(d + u_2) + \alpha(d + u_2 + \alpha)(d + u_1)}{d\beta(d + u_2 + \alpha)} \\ R_0 &= \frac{b\beta}{(d + u_1).(u_2 + d + \alpha)} = \frac{b}{(d + u_1)}.\frac{\beta}{(d + u_2 + \alpha)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

NOT:Burada $R_0 = \dfrac{b\beta}{(d + u_1).(u_2 + d + \alpha)}$ sayısı , hassas bireylerden oluşan bir topluluğa enfeksiyonlu bir bireyin katılmasıyla oluşan ikincil enfeksiyonların sayısını ifade eder ve literatürde " temel çoğalma (reprodüksiyon) sayısı " olarak adlandırılır.

R_0 sayısı , salgın hastalığın topluluk içinde sürekli kalıcı olup olmayacağını belirleyen bir eşik değeridir.

$R_0 \leq 1$ olduğunda hastalık herhangi bir tıp müdahalesi olmadan yok olur. Endemik olmaz. $R_0 > 1$ iken hastalık salgın olur ve bu durumu engellemek için bazı kontrol ölçekleri kullanılmalıdır.

Önerme 3.2. $R_0 < 1$ için (S^0, I^0, N^0) denge noktası (3.2) sisteminin lokal asimptotik kararlı denge noktasıdır.

İspat : $(S^0, I^0, N^0) = (\frac{b}{d+u_1}, 0, \frac{b}{d})$ noktasında (3.2) sisteminin Jakobian matrisi yazılırsa,

$$\frac{dS}{dt} = f(S,I,N) \quad \frac{dI}{dt} = g(S,I,N) \quad \frac{dN}{dt} = h(S,I,N)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial N} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial N} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial N} \end{bmatrix}_{(S,I,N)=(S^0,I^0,N^0)}$$

olmak üzere

$$= \begin{bmatrix} -\beta I - d - u_1 & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - d - u_2 - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix}_{(S^0,I^0,N^0)}$$

$$= \begin{bmatrix} -d - u_1 & \frac{-\beta b}{d+u_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bu matrisin özdeğerini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ile gösterilirse,

$$det(J - \lambda I) = 0$$

eşitliğinden,

$$det(J-\lambda I) = \begin{vmatrix} -d-u_1-\lambda & \frac{-\beta b}{d+u_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-d-\lambda) \begin{bmatrix} -d-u_1-\lambda & \frac{-\beta b}{d+u_1} \\ 0 & \frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-d-\lambda)(-d-u_1-\lambda)(\frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha - \lambda) = 0$$

Dolayısıyla karakteristik denklemin köklerine bakıldığında özdeğerleri

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -d \\ \lambda_2 &= -(d+u_1) \\ \lambda_3 &= \frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha \end{cases}$$

biçiminde bulunmuş olur.

i-) $\lambda_1 = -d < 0$

ii-) $\lambda_2 = -(d+u_1) < 0$

iii-) $\lambda_3 = \frac{\beta b}{d+u_1} - d - u_2 - \alpha = (R_0 - 1)(d + u_2 + \alpha)$ olur.

Şimdi R_0 'un durumuna göre λ_3 'ü inceleyelim.

a.) $R_0 < 1$ olduğu durumda $\lambda_3 < 0$ olur.

Burada bütün kökler negatif olduğu için

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$$

(S^0, I^0, R^0) noktasında kararlı olacaktır.

b.) $R_0 > 1$ olduğu durumunda ise $\lambda_3 > 0$ şeklindedir.

Burada köklerden biri pozitif olduğu için

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$$

(S^0, I^0, R^0) noktası kararlı değildir.

SONUÇ OLARAK;

1.)$R_0 < 1$ ise

$$(S^0, I^0, N^0) = (\frac{b}{d+u_1}, 0, \frac{b}{d})$$

noktasında Lokal asimptotik kararlıdır.

2.)$R_0 > 1$ ise

$$(S^0, I^0, N^0) = (\frac{b}{d+u_1}, 0, \frac{b}{d})$$

noktasında Kararsızdır.

Önerme 3.3. (S^*, I^*, N^*), endemik denge noktası (EN),(3.2) sisteminin $R_0 > 1$ için lokal asimptotik kararlı denge noktasıdır.

İspat : (S^*, I^*, N^*) noktasında (3.2) sisteminin Jakobian matrisi yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial N} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial N} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial N} \end{bmatrix}_{(S^*,I^*,N^*)} \\
&= \begin{bmatrix} -\beta I - d - u_1 & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - d - u_2 - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix}_{(S^*,I^*,N^*)} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-\beta(R_0-1)(d+u_1)}{\beta} - (d+u_1) & \frac{-\beta(d+\alpha+u_2)}{\beta} & 0 \\ \frac{\beta(R_0-1)(d+u_1)}{\beta} & \frac{\beta(d+\alpha+u_2)}{\beta} - (d+\alpha+u_2) & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(d+u_1)(R_0-1+1) & -(d+u_2+\alpha) & 0 \\ (R_0-1)(d+u_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(R_0)(d+u_1) & -(d+u_2+\alpha) & 0 \\ (R_0-1)(d+u_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -d \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

şeklinde daha sade biçimde yazılabilir.

J matrisinin karakteristik denklemi,

$$P(\lambda) = det(J - \lambda I) = 0$$

$$det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix} -(R_0)(d+u_1)-\lambda & -(d+u_2+\alpha) & 0 \\ (R_0-1)(d+u_1) & -\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & -d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-d-\lambda)[(R_0(d+u_1)+\lambda)\lambda+(d+u_2+\alpha)(R_0-1)(d+u_1)]$$

$$=(-d-\lambda)[\lambda^2+R_0(d+u_1)\lambda+(d+u_2+\alpha)(R_0-1)(d+u_1)]$$

olarak bulunur. Karakteristik denklem kökleri ise

$$\lambda_1=-d$$

ve

$$\lambda_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

biçimindedir.Burada,

$$\begin{aligned}\Delta &= (R_0)^2.(d+u_1)^2-4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)(d+u_1)\\ b &= R_0(d+u_1)\end{aligned}$$

dır.Başka bir deyişle

$$\lambda_{2,3}=\frac{-R_0(d+u_1)\pm\sqrt{(R_0)^2.(d+u_1)^2-4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)(d+u_1)}}{2}$$

olur.

a.) $R_0<1$ iken

$$\sqrt{(R_0)^2.(d+u_1)^2-4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)(d+u_1)}>0$$

$$\sqrt{(R_0)^2.(d+u_1)^2-4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)(d+u_1)}>R_0(d+u_1)$$

$$-R_0(d+u_1)+\sqrt{(R_0)^2.(d+u_1)^2-4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)}>0$$

$$\frac{-R_0(d+u_1)+\sqrt{\Delta}}{2}>0$$

$$\lambda_2>0$$

olup $\lambda_{2,3}$ köklerinden biri pozitif olacağından (S^*,I^*,N^*) noktası kararlı olmayan denge noktası olacaktır. Yani $R_0<1$ iken (S^*,I^*,N^*) noktası kararlı değildir.

b.)$R_0>1$ iken kökler reel veya kompleks olabilir. Eğer

$$\sqrt{(R_0)^2.(d+u_1)^2 - 4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha)} < 0$$

$\lambda_{2,3}$ kökleri kompleks olur.Ancak köklerin reel kısımları, $R_e(\lambda_2) = R_e(\lambda_3) = -R_0(d+u_1) < 0$ olacağından (S^*, I^*, N^*) noktası asimptotik kararlı olur.Diğer yandan,

$$\Delta = (R_0)^2.(d+u_1)^2 - 4.(R_0-1)(d+u_2+\alpha) \geq 0$$

ise $\sqrt{\Delta} < R_0(d+u_1)$ olduğu açıktır. Bu halde de

$$\lambda_2 = \frac{-R_0(d+u_1)+\sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = \frac{-R_0(d+u_1)-\sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

olup (S^*, I^*, N^*) noktası asimptotik kararlı olur.

Yani $R_0 > 1$ iken (S^*, I^*, N^*) noktası lokal asimptotik kararlıdır.

SONUÇ OLARAK;

1.)$R_0 < 1$ ise

$$(S^*, I^*, N^*)$$

noktası kararlı değildir.

2.)$R_0 > 1$ ise

$$(S^*, I^*, N^*)$$

noktası lokal asimtotik kararlıdır.

Önerme 3.4. $R_0 \leq 1$ iken hastalıktan bağımsız $\varepsilon_0 = (S^0, I^0, N^0) = (\frac{b}{d+u_1}, 0, \frac{b}{d})$ denge noktası global asimtotik kararlıdır.

İspat : $\Omega = \{(S,I,N) \in R^3_+ : S \geq 0, I \geq 0, N \geq 0, S+I \leq N \leq \frac{b}{d}\}$ kümesini dikkate alalım. Bu kümenin pozitif invaryant olduğunu daha önce ispatlamıştık. $\forall (S,I,N) \in \Omega$ için

$$V(S,I,N) : R^3 \to R^+$$

iken

$$V(S,I,N) = wI$$

$(w = \frac{1}{u_2+d+\alpha} \geq 0)$

Lyapunov fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyonun Ω kümesi üzerinde sürekli ve türevlenebilir ayrıca,

$$\begin{aligned}
V^{'} &= wI^{'} \\
&= w(\beta SI - u_2 I - dI - \alpha I) \\
&= w(\beta S - (u_2 + d + \alpha))I \\
&\leq w(\frac{\beta b}{d+u_1} - (u_2 + d + \alpha))I \quad iken \quad S \leq S^0 = \frac{b}{d+u_1} \\
&= w(u_2 + d + \alpha)(\frac{\beta b}{(d+u_1)(d+u_2+\alpha)} - 1)I \quad iken \quad (w = \frac{1}{u_2 + d + \alpha}) \\
&= (R_0 - 1)I \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

olduğundan $R_0 \leq 1$ için $V^{'} \leq 0$ dur. Diğer yandan $(S, I, N) \in \Omega$ olmak üzere $V^{'} = V^{'}(S, I, N) = 0$ şartını sağlayan tek durum ise $I = 0$ olduğu durumdur. Başka bir deyişle $x \in \Omega : V^{'}(x) = 0 = (S, I, N) \in \Omega : I = 0$ dir. $S = \{(S, I, N) \in \Omega : V^{'} = 0\}$ kümesini ele alalım. (3.2) sisteminde $I = 0$ konulacak olursa,

$$\begin{aligned}
S^{'} &= b - dS - u_1 S \\
I^{'} &= 0 \\
N^{'} &= b - dN
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $S^{'}$ ve $N^{'}$ çözülecek olursa,

$$\begin{aligned}
S^{'} + (d+u_1)S = b \iff & e^{(d+u_1)t}.S^{'} + (d+u_1)e^{(d+u_1)t}S = b.e^{(d+u_1)t} \\
\iff & \frac{d}{dt}[e^{(d+u_1)t}.S] = b.e^{(d+u_1)t} \\
\iff & e^{(d+u_1)t}.S = \int b.e^{(d+u_1)t}dt + c \\
\iff & S(t) = \frac{b}{(d+u_1)} + c.e^{-(d+u_1)t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N^{'} = b - dN \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{b - dN} = dt \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{dN}{b - dN} = \int dt + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-ln(b - dN)}{d} = t + c \\
&\Longleftrightarrow \quad b - dN = e^{-dt}.c \quad (c = e^{-cd}) \\
&\Longleftrightarrow \quad N(t) = \frac{b}{d} - \frac{ce^{-dt}}{d}
\end{aligned}
$$

bulunur. $t \to \infty$ için

$$S(t) \to \frac{b}{d + u_1}$$

$$N(t) \to \frac{b}{d}$$

olur. Bundan dolayı E kümesinin pozitif invaryant en geniş alt kümesi , sadece $\{\varepsilon_0\}$ tek nokta kümesi olur. Buna göre (3.2) sisteminin tüm çözümleri E' nin en geniş invaryant alt kümesi olan $\{\varepsilon_0\}$ a yakınsar. Başka bir deyişle $\{\varepsilon_0\}$ denge noktası global kararlıdır.

Önerme 3.5. $R_0 > 1$ iken Endemik denge noktası $\varepsilon_1 = (S^*, I^*, N^*)$ için global asimtotik kararlıdır.

İspat : Daha önce gösterildiği üzere $R_0 > 1$ iken ε_1 noktası (3.2) sisteminin bir lokal asimptotik kararlı denge noktası olmaktadır. $\Omega = \{(S, I, N) \in R^3_+ : S \geq 0, I \geq 0, N \geq 0, S + I \leq \ N \leq \frac{b}{d}\}$ kümesini dikkate alalım. $R_0 > 1$ iken $\varepsilon_1 = (S^*, I^*, N^*)$ için denge noktasının var olduğu bilinmektedir. Şimdi $\varepsilon \geq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$V(S, I, N) = \frac{1}{2}(N - N^*)^2 + \frac{1}{2}(S - S^*)^2 + \varepsilon(I - I^* - I^* ln(\frac{I}{I^*}))$$

Lyapunov fonksiyonunu dikkate alalım. Burada ε sayısını ispat esnasında belirlenecek pozitif bir sayıdır. Bu fonksiyon Ω kümesi üzerinde sürekli-türevlenebilirdir,

$V(S, I, N)$ fonksiyonunu türevi alınırsa ,

$$V^{'} = (N - N^*)\dot{N} + (S - S^*)\dot{S} + \varepsilon(I - (\frac{I}{I^*}))\dot{I}$$

olur. (3.2) sisteminde belirli olan $(\dot{S}, \dot{I}, \dot{N})$ yukardaki sistemde yerine koyulursa;

$$\begin{aligned} V^{'} &= (N-N^*)(b-Nd-\alpha I)+(S-S^*)(b-\beta SI-dS-u_1S)+ \\ &\quad +\epsilon(I-(\frac{I}{I^*}))(\beta SI-u_2I-dI-\alpha I) \end{aligned}$$

elde edilir. (S^*, I^*, N^*) (3.2) sisteminin denge noktası olduğundan, (3.2) sisteminden;

$$b=\beta S^*I^*+dS^*+u_1S^*=dN+\alpha I^*$$
$$\beta S^*I^*=(u_2+d+\alpha)I^*=b-dS^*-u_1S^*$$

eşitlikleri sağlanır. Eşitsizlileri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} V^{'} &= (N-N^*)(b-Nd-\alpha I)+(S-S^*)(b-\beta SI-dS-u_1S)+ \\ &\quad +\varepsilon(I-(\frac{I}{I^*}))(\beta SI-u_2I-dI-\alpha I) \\ &= (N-N^*)(b-Nd-\alpha I)+(S-S^*)(b-\beta SI-dS-u_1S)+ \\ &\quad +\frac{\varepsilon}{I}(I-I^*)(\beta SI-u_2I-dI-\alpha I) \\ &= (N-N^*)(dN^*+\alpha I^*-dN-\alpha I)+(S-S^*)(\beta S^*I^*+ \\ &\quad +dS^*+u_1S^*-\beta SI-dS-u_1S)+\frac{\varepsilon}{I}(I-I^*)(\beta SI-\beta S^*I) \\ &= -d(N-N^*)^2-\alpha(N-N^*)(I-I^*)-(u_1+d)(S-S^*)^2+ \\ &\quad +\beta S^*(I^*-I)(S-S^*)-\beta I(S-S^*)^2+\beta\varepsilon(I-I^*)(S-S^*) \\ &= -d(N-N^*)^2-(u_1+d+\beta I)(S-S^*)^2-\alpha(N-N^*)(I-I^*)+ \\ &\quad +\beta(\varepsilon-S^*)(I-I^*)(S-S^*) \end{aligned}$$

bulunur. $\varepsilon = S^*$ seçilirse $N \leq N^*, I \leq I^*$ için $V^{'} \leq 0$ olacaktır. O halde $R_0 > 1$ için $V^{'} \leq 0$ elde edilir. $E = \{(S, I, N) \in \Omega : V^{'} = 0\}$ kümesini ele alalım ve M , E kümesi içindeki geniş pozitif invaryant küme olsun. Burada $V^{'} = 0$ iken $S = S^*$, $I = I^*$ ve $N = N^*$ dir .Başka bir deyişle $E = \{\varepsilon_1\}$ dir. O halde $M = E$ dir.
Lasalle İnvaryantlık teoremine göre sistem $(t \to \infty)$ iken M kümesine yaklaşacaktır. Başka bir deyişle $\varepsilon_1 = (S^*, I^*, N^*)$ sabit noktasında sistem global asimtotik kararlıdır.

4. SIR MODELİNİN OPTİMAL KONTROLÜ

Salgın hastalığın yayılmasını engellemek için hastalık kapmaya müsait olan bireylerin(S) yüksek oranda aşılanması veya hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireylerin (I) yüksek oranda tedavi kontrolünün yapılması gereklidir. Aşısı ve tedavisi mümkün olan bulaşıcı hastalıkların yayılmaması için önceden önlemler alınmalıdır. Örneğin; sıtma gibi hastalıklara tıbbi tedavi uygulanırken , Çocuk felci gibi hastalıklarda tıbbi tedavi söz konusu değildir. Ancak hastalığın bulaşmaması için bireyler aşı olabilirler. Bazı kızamık , tüberküloz gibi hastalıklar ise , uygulanan geniş aşılama ve tedavi uygulamalarına rağmen aşıların yeterli olmaması veya aşılamanın her yere ulaştırılamaması gibi nedenlerle halen görülmektedir. Bu nedenle salgın hastalıkların incelenmesi , kontrolünün geliştirilmesi ve bunlar için uygun yöntemlerin bulunması gerekir. Burada da en iyi sonucu elde etmek ve uygun kararlar almak için matematiksel bir yöntem olan optimal kontrol teorisi kullanılabilir.

Optimal kontrolün asıl amacı, aşılama ve tedavi maliyetini en aza indirerek hastalıkların sayısını azaltmaktır. Bu bölümde , SIR modeline , herhangi bir t zamanı anında hastalığa karşı duyarlı bireylere (S) uygulanacak aşılama oranını ifade eden $u_1(t)$ ve t zamanı anında hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireyler (I) uygulanacak tedavi oranını ifade eden $u_2(t)$ kontrol parametresi eklenerek oluşturulmuş olan kontrol sistemi incelenecektir. Optimal aşılama ve tedavi stratejisi, belli bir T - terminal zamanında aşılama ve tedavi maliyetine bağlı olarak verilmiş olan bir maliyet fonksiyonunu minimize etme düşüncesine göre elde edilecektir.

SIR sisteminde aşılama ve tedavi kontrolü parametrelerinin seçimi için ,

$$U = \{(u_1(t)), (u_2(t)) | 0 \leq u_1 \leq u_1max \leq 1, \quad 0 \leq u_2 \leq u_2max \leq 1, \quad t \in [0, T]\} \quad (4.1)$$

mümkün kontrol kümesini tanımlayalım. Herhangi bir t zamanı anında $u_1(t)$ hastalığa karşı duyarlı bireylere (S) uygulanacak aşılama oranı , $u_2(t)$ ise hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireylerin (I) tedavi kontrol oranını göstermek üzere,

$$\begin{cases} S' &= b - \beta SI - dS - u_1 S \\ I' &= \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I \end{cases} \quad (4.2)$$

$$(S(0), I(0)) = (S_0, I_0) \in \Omega^{'} = \{(S, I) : S > 0, I > 0, S + I \leq \frac{b}{d}\} \subset \Omega \tag{4.3}$$

sistemini ele alalım. Maliyet fonksiyonu,

$$J[u_1, u_2] = \min_{(u_1,u_2)} I(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2)dt \tag{4.4}$$

fonksiyoneli ile verilsin. Burada C_1 ve C_2 sırasıyla aşılama ve tedavi maliyetine bağlı ağırlık sabitleridir. u_1max , u_1 in uygulanabilir maksimum oranını ve u_2max da u_2 için uygulanabilir maksimum oranını göstermektedir.

$C_1u_1^2$ ve $C_2u_2^2$ terimleri aşılama ve tedavi kontrollerinin kullanım oranlarıyla ilgili ağırlık maliyetlerini ifade ederler.

Önerme 4.1. (4.2)-(4.3)-(4.4) optimal kontrol probleminin bir çözümü vardır ve tektir.

İspat : Sistemimiz $\mathbf{y} = (S, I)$ $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ olmak üzere

$$\dot{y} = f(y, u)$$

biçiminde gösterilebilir.Burada,

$$f(y,u) = \begin{bmatrix} f_1(S, I, u_1, u_2) \\ f_2(S, I, u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - \beta SI - dS - u_1 S \\ \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I \end{bmatrix}$$

olup,

$$y(0) = (S_0, I_0) \in \Omega^{'} = \{(S, I) : S > 0, I > 0, S + I \leq \frac{b}{d}\} \subset \Omega$$

ve $\mathbf{u} \in U$ (4.1) ile tanımlıdır. Şimdi Teorem (2.27)'ün koşullarının sağladığını gösterelim.

f ($\mathbf{y}$,$\mathbf{u}$) fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır.Ayrıca $\Omega^{'}$ kümesi (4.2) sistemi için pozitif invaryanttır.

$$f(y) = \begin{bmatrix} b - \beta SI - dS \\ \beta SI - dI - \alpha I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\alpha(t,\mathbf{y}) \quad = \quad \begin{bmatrix} b-\beta SI-dS \\ \beta SI-dI-\alpha I \end{bmatrix}$$

ve

$$\beta(t,\mathbf{y}) \quad = \quad \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f(\mathbf{y}) = \alpha(t,\mathbf{y}) + \beta(t,y)u$ biçiminde yazılabilir.

$f(y,u)$ fonksiyonu $\mathbf{y}$ 'e göre lipschitz olup olmadığını inceleyelim.

$$A1) \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial S}\right| = |-\beta I - d - u_1| = \beta I + d + u_1 \leq \beta.\frac{b}{d} + d + 1$$

$$A2) \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial I}\right| = |-\beta S| = \beta S \leq \beta.\frac{b}{d}$$

$$A3) \quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial S}\right| = |\beta I| = \beta I \leq \beta.\frac{b}{d}$$

$$A4) \quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial I}\right| = |-u_2 - d - \alpha| = u_2 + d + \alpha \leq 1 + d + \alpha$$

A1) ,A2) ,A3) ve A4) ile $f(y,u)$ fonksiyonu keyfi sabitlenmiş $u \in U$ için [0,T] aralığında y' e göre tüm kısmi türevleri sınırlıdır. Dolayısıyla y' e göre Lipschitz olduğu gösterilmiş olur. O halde Teorem (2.25) den (4.2) -(4.3) sisteminin çözümleri var ve tektir. Yani çözüm kümesi boş kümeden farklıdır. Ayrıca teorem (2.26) gereğince (4.2) sisteminin Ω' kümesinden çıkan tüm çözümleri keyfi $T > 0$ için $[0,T]$ aralığında devam ettirilebilir.

Diğer yandan

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right| = |-S| = S \leq \frac{b}{d} \qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right| = 0$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right| = 0 \qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right| = |-I| = I \leq \frac{b}{d}$$

olduğundan $f(y,u)$ fonksiyonu $\mathbf{u}$ 'ya göre kısmi türevleride sınırlıdır. Dolayısıyla , Teorem (2.27) gereğince i-) ve ii-) koşulları sağlanmış olur. U kontrol kümesinin ve Ω' kümesinin

boş kümeden farklı ve kompakt olduğu açık olduğundan iii-) koşuluda sağlanmaktadır. U kontrol kümesi konvekstir. Şimdide $L(t,y,u)$ fonksiyonunun U üzerinde konveks fonksiyon olduğunu gösterelim.Bunun için $L(t,y,u)$ nin Hessian matrisini yazalım.

$$L(t,y,u)=\frac{1}{2}[C_1u_1^2+C_2u_2^2]$$

olduğundan,

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=C_1u_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2}=C_1 \quad ve \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_1\partial u_2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2}=C_2u_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2}=C_2 \quad ve \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_2\partial u_1}=0$$

bulunur.Buradan,

$$H(u_1,u_2) \quad = \quad \begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$D_1=C_1>0 \qquad , \quad D_2=\begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{vmatrix}=C_1C_2>0$$

olmaktadır.Teorem(2.15) 'dan Hessian matrisi pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla Teorem (2.20) ve önerme (2.21)'den $L(t,y,u)$ fonksiyonun U üzerinde konveks fonksiyondur. O halde iv-) koşulu da sağlanmış olur.

$$L(t,y,u)=\frac{1}{2}[C_1u_1^2+C_2u_2^2]$$

olup $min\{C_1,C_2\}=2k_1$ ve $k_2>0$ olsun.
Bu durumda ,

$$\begin{aligned} L(t,y,u) \quad &\geq \quad \frac{1}{2}[2k_1u_1^2+2k_2u_2^2] \\ &= \quad k_1\|u\|^2 \\ &\geq \quad k_1\|u\|^2-k_2 \end{aligned}$$

olduğundan v-). koşuluda sağlanmış olur. Dolayısıyla (4.2)-(4.3)-(4.4) optimal kontrol probleminin çözümü vardır ve tektir.

Önerme 4.2. $u_1^* = u_1^*(t)$, $u_2^* = u_2^*(t)$ probleminin optimal kontrolü ve S^*, I^* da bu kontrole karşılık gelen çözüm olsun. Bu durumda öyle λ_1, λ_2 adjoint değişkenleri vardır ki,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{'} &= \lambda_1(\beta I + d + u_1^*) - \lambda_2(\beta I) \\ \lambda_2^{'} &= \lambda_2(u_2^* + d + \alpha - \beta S) + \lambda_1(\beta S) \end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitlikleri ve

$$\lambda_1(T) = 0 \quad \lambda_2(T) = 1$$

transversality koşullarını sağlanır. Ayrıca problemin $u_1^* = u_1^*(t)$, $u_2^* = u_2^*(t)$ optimal kontrol çözümü,

$$u_1^* = \min\{\max\{0, \frac{\lambda_1 S}{C_1}\}, u_1 max\}, \quad u_2^* = \min\{\max\{0, \frac{\lambda_2 I}{C_2}\}, u_2 max\}$$

biçimindedir.

İspat : Hamiltonion fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}C_1 u_1^2 + \frac{1}{2}C_2 u_2^2 &+ \lambda_1(b - \beta SI - dS - u_1 S) \\ &+ \lambda_2(\beta SI - u_2 I - dI - \alpha I) \end{aligned} \tag{4.6}$$

biçimindedir. $u_1^* = u_1^*(t)$, $u_2^* = u_2^*(t)$, probleminin optimal kontrolü olsun. Optimal kontrolün varlığı için gerekli olan koşulları karakterize eden Pontryagin Maksimum Prensibi kullanılacak olursa, $F(S, I) = I$ olduğundan $t = T$ final anında transversality koşulları,

$$\lambda_1(T) = 0 \quad \lambda_2(T) = 1$$

biçiminde olacaktır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{'} = -\frac{\partial H}{\partial S} &= \lambda_1(\beta I + d + u_1^*) - \lambda_2(\beta I) \\ \lambda_2^{'} = -\frac{\partial H}{\partial I} &= \lambda_2(u_2^* + d + \alpha - \beta S) + \lambda_1(\beta S) \end{aligned} \tag{4.7}$$

biçiminde bulunur.

Dolayısıyla adjoint sistem S^*, I^* sırasıyla $u_1^* = u_1^*(t)$, $u_2^* = u_2^*(t)$ a karşılık gelen çözümleri göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{'} &= \lambda_1(\beta I + d + u_1^*) - \lambda_2(\beta I) \\ \lambda_2^{'} &= \lambda_1(\beta S) - \lambda_2(\beta S - u_2^* - d - \alpha) \end{aligned}$$

olur.$u_1^* = u_1^*(t)$, $u_2^* = u_2^*(t)$' nin H'yi minimize etmesi gerektiğinden ,

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u_1}\right|_{u_1=u_1^*} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 u_1^* - \lambda_1 S = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u_1^* = \frac{\lambda_1 S}{C_1}$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u_2}\right|_{u_2=u_2^*} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 u_2^* - \lambda_2 I = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u_2^* = \frac{\lambda_2 I}{C_2}$$

bulunur.

$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = C_1 \geq 0 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = C_2 \geq 0$ olduğundan bu değer minimum olmalıdır. Ancak

$$0 \leq u_1(t) < u_1 max$$

$$0 \leq u_2(t) < u_2 max$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} u_1^* &= \min\{\max\{0, \frac{\lambda_1 S}{C_1}\}, u_1 max\} \\ u_2^* &= \min\{\max\{0, \frac{\lambda_2 I}{C_2}\}, u_2 max\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla önermenin doğruluğu gösterilmiş olur.

Bir önceki önermenin sonucu olarak probleme karşılık gelen optimal sistem,

$$\begin{cases} S^{'} & = b - \beta SI - dS - u_1^* S, \\ I^{'} & = \beta SI - u_2^* I - dI - \alpha I, \\ S(0) & = S_0 \ , \ I(0) = I_0 \ , \\ \lambda_1^{'} & = \lambda_1(\beta I + d + u_1^*) - \lambda_2(\beta I) \\ \lambda_2^{'} & = \lambda_1(\beta S) - \lambda_2(\beta S - u_2^* - d - \alpha) \\ \lambda_1(T) & = 0 \ , \ \lambda_2(T) = 1 \ , \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Görüldüğü üzere SIR sisteminin, Maliyet fonksiyonunu minimize edecek şekildeki u_1^*, u_2^* optimal kontrolü sistem değişkenlerine bağlı olduğu gibi aynı zamanda da adjoint sisteminin değişkenlerine bağlıdır.

5. OPTİMAL KONTROLÜN NÜMERİK OLARAK HESABI

5.1. Optimal Kontrolün SIR Modeli Üzerinde Etkisinin Nümerik Simülasyonu

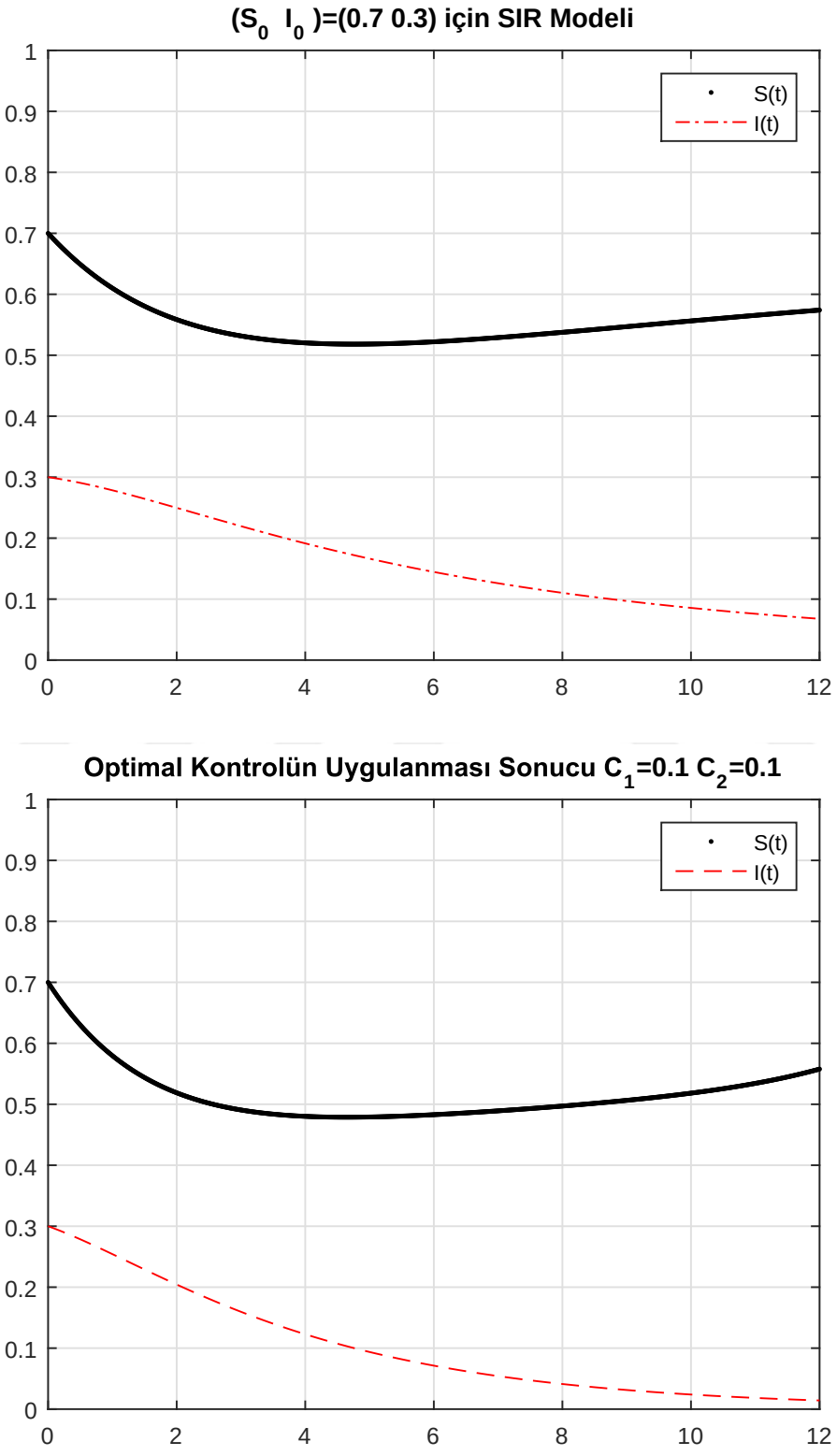
Bu bölümde SIR modeli, kontrol parametrelerinin eklenmediği ve kontrolün uygulandığı iki ayrı sistem göz önüne alınmış ve bu sistemlerin nümerik incelemesi yapılmıştır. Kontrolün uygulanmadığı SIR sistemimizin çözümünde Runge - Kutta metodu ile nümerik çözümü yapılmış , optimal sistemin çözümünde ise literatürde Forward-Backward-Sweep(FSB) algoritması kullanılmıştır(Hackbush, 1978 ; Lenhart ve Workman , 2007). Çözümlerin ve bu çözümlere ilişkin grafiklerin oluşturulması için MATLAB programı kullanılmıştır. Sistemde kullanılacak olan parametreler R_0 sayısının durumlarına uygun olacak şekilde keyfi olarak seçilmiştir. Seçilen parametrelere göre oluşturulan iki ayrı sistemin (optimal kontrolün uygulandığı ve kontrolün olmadığı) çözümleri karşılaştırılacaktır. Ayrıca elde edilen optimal kontrolün [0,T] zaman aralığı içerisindeki kullanım grafiği oluşturulacaktır.

Çizelge 5.1. SIR Modeli için parametre değerleri.

Pozisyon	Parametre	$R_0 \leq 1$ için	$R_0 > 1$ için
1.	b	0.2	0.03
2.	d	0.3	0.02
3.	α	0.1	0.1
4.	β	0.5	0.75
5.	S_0	0.7	0.95
6.	I_0	0.3	0.05

Modelimiz için ilk olarak $R_0 \leq 1$ durumunda optimal kontrolsüz SIR modeli ve optimal kontrollü SIR modelimize uygun parametre değerleri atayarak nümerik çözümlerini ele alalım.

Sistemimizde parametre değerlerimiz $(S_0, I_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç değerleriyle birlikte $b = 0.21$, $d = 0.21$, $\alpha = 0.32$ ve $\beta = 0.36$ olarak seçildiğinde $R_0 = 0,6792 < 1$ değerine ulaşmış oluruz.



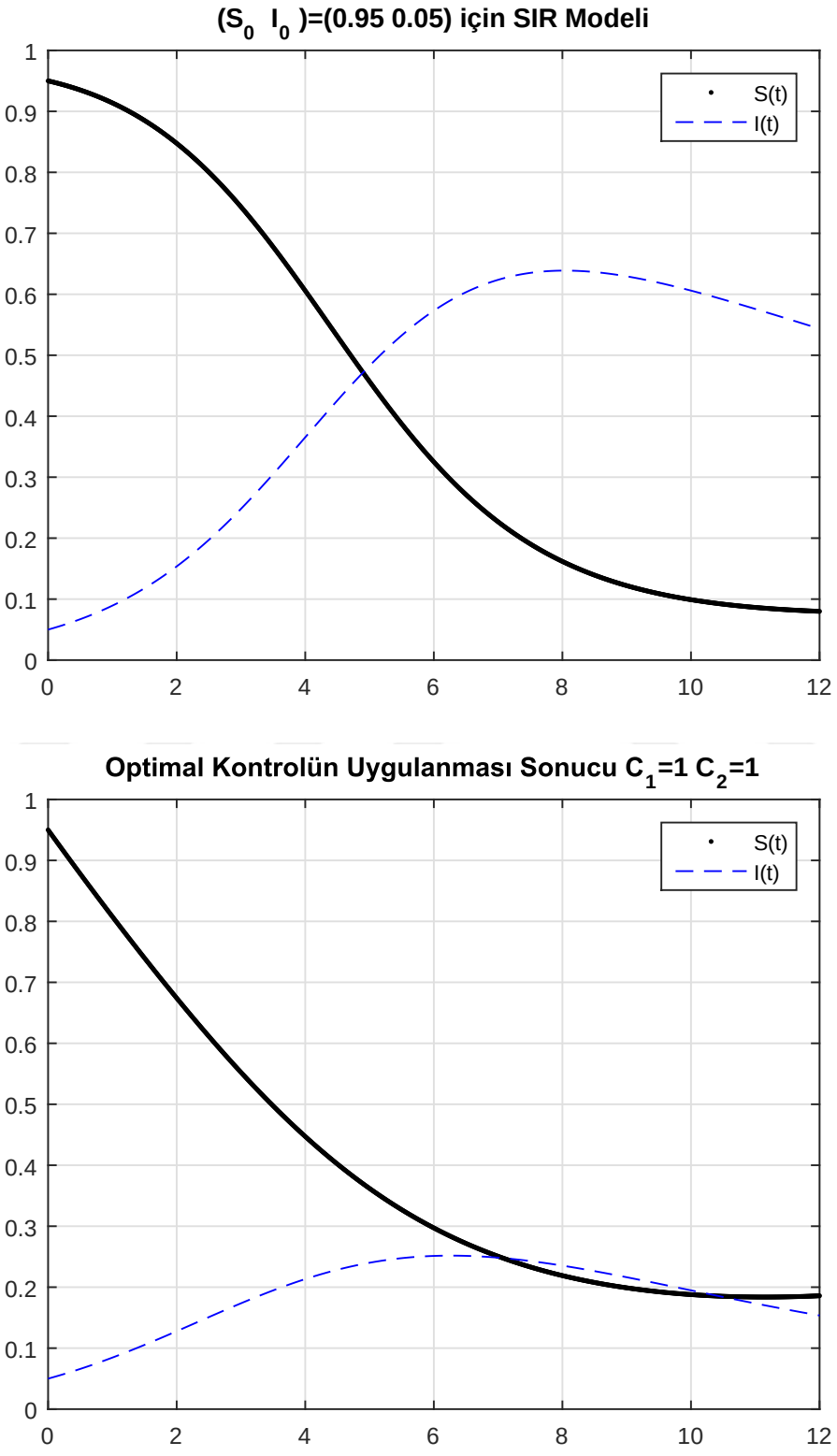
Şekil 5.1. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 \leq 1$)

Şekil 5.1' deki simülasyonlara baktığımızda 12 aylık periyotta sağlıklı bireyleri(S) oranının giderek arttığı, hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireylerin(I)oranında ilk günden itibaren azalarak sıfıra yaklaştığı görülmektedir. $R_0 \leq 1$ olması durumunda sistem $(S, I) = (1, 0)$ noktasına yakınsadığı bir başka deyişle hastalıksız denge noktasının(HB)global asimtotik stabil olduğu görülmektedir. Burada sisteme kontrol uygulanmadan yani dış etkiye gerek kalmadan enfeksiyon kendiliğinden ortadan kalkacağını göstermektedir. Ancak grafiklerdende görüleceği gibi optimal aşılama ve tedavi kontrolü, enfeksiyonun gelişimini daha kısa sürede engellemek için önemlidir. Burada iki simülasyonda da hastalık zamanla yok olacaktır. Grafikleri karşılaştıracak olursak ilk 4 aylık periyotta hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip hastalıklı bireylerin(I) sayısı optimal kontrolsüz sistemde milyonda 0.2 bin iken optimal kontrolün sistemimize uygulanması sonucu bu sayı milyonda 0.12 binlere kadar düştüğü görülmektedir. Buda aşılama ve tedavi kontrolü eklendikten sonra daha kısa sürede hastalıklı birey sayısı azaldığını göstermektedir. Burada, optimal kontrolün belirlenmesinde kullanılan kazanç fonksiyonu garafikler arasındaki farklılıkların belirgin olması için $C_1 = 0.1 \quad C_2 = 0.1$ alınmıştır.

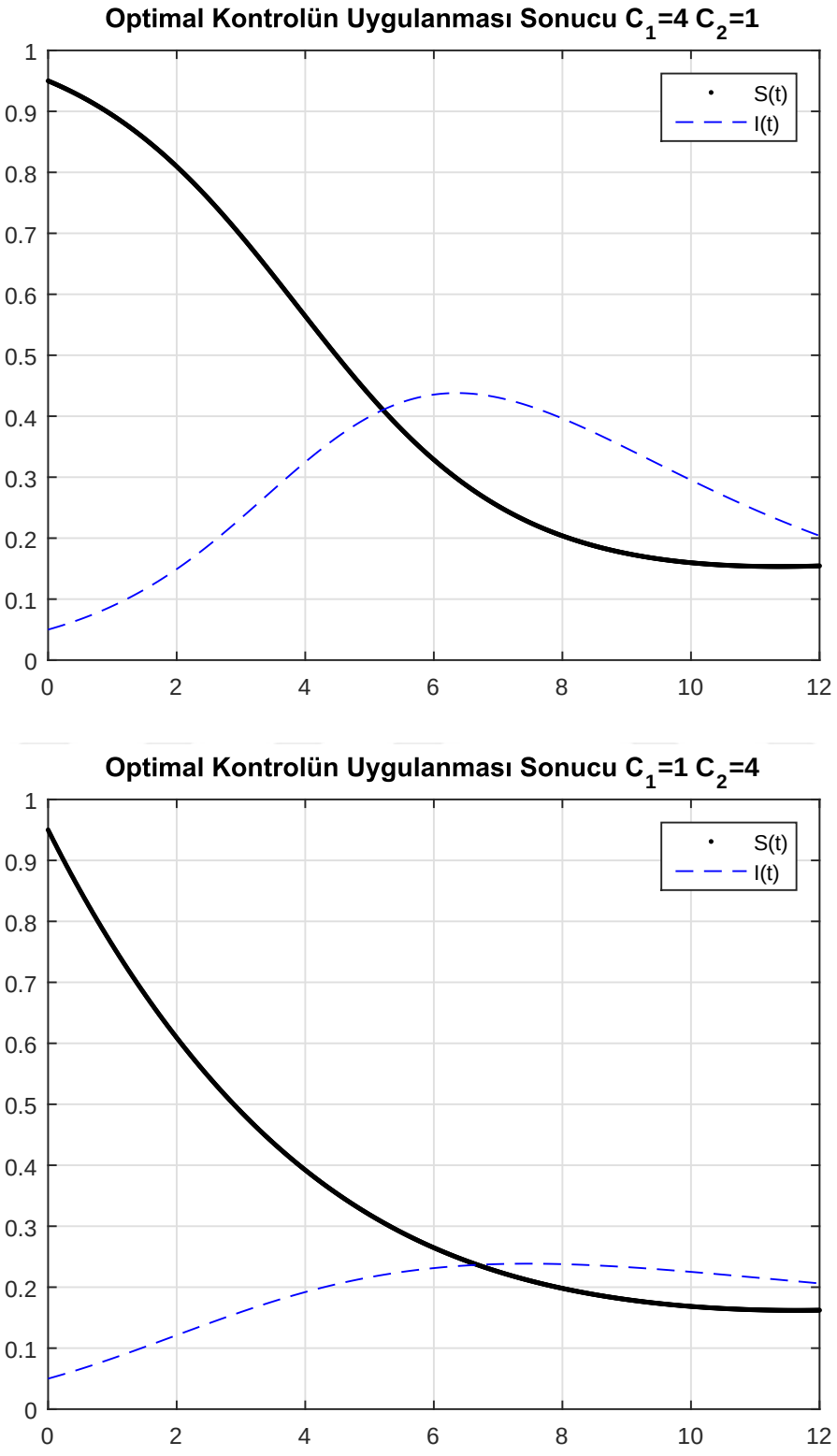
Optimal kontrolsüz SIR modelimiz ve optimal kontrollü SIR modelimiz için $R_0 > 1$ olması durumundaki nümerik simülasyonları inceleyelim. Sistemlerimizde $(S_0, I_0) = (0.95, 0.05)$ başlangıç değerleriyle birlikte $b = 0.03$, $d = 0.02$, $\alpha = 0.1$ ve $\beta = 0.75$ olarak seçildiğinde $R_0 = 9.3750 > 1$ değerine ulaşmış oluruz.

$R_0 > 1$ olduğu durumda salgın yapacağı için kontrol altına alınmalıdır. Şekil 5.2 'deki ilk grafikte optimal aşılama ve tedavi kontrolü uygulanmadığında ilk 12 ay içerisinde sağlıklı bireylerin oranı milyonda 0.08 bin ve hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip bireylerin (I) oranı milyonda 0.54 bine ulaştığı görülmektedir. Optimal aşılama ve tedavi kontrolü uygulandığında ortaya çıkacak sonuç Şekil 5.2 'deki ikinci grafikte verilmiştir. Bu grafikte görüldüğü üzere mevcut ekonomik şartlarda optimal aşılama ve tedavi yapılacak olursa sağlıklı bireylerin sayısı yaklaşık milyonda 0.2 bine kadar arttığı ve hastalığı kapmış bulaştırma kapasitesine sahip (I) bireylerin oranı milyonda 0.15 bine düştüğü görülmektedir. Bu da optimal aşılama ve tedavi kontrolü uygulanması sonucunda hastalıklı birey sayısının daha kısa sürede azalmasında sebep olmuştur. Burada , optimal kontrolün belirlenmesinde kullanılan kazanç fonksiyonu $C_1 = 1 \quad C_2 = 1$ alınmıştır.

Şimdi $(C_1 = 4 \quad C_2 = 1) \quad (C_1 = 1 \quad C_2 = 4\ ) \quad (C_1 = 1 \quad C_2 = 1)$ olduğu durumdaki aşılama ve tedavi ağırlık maliyeti ile popülasyon arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



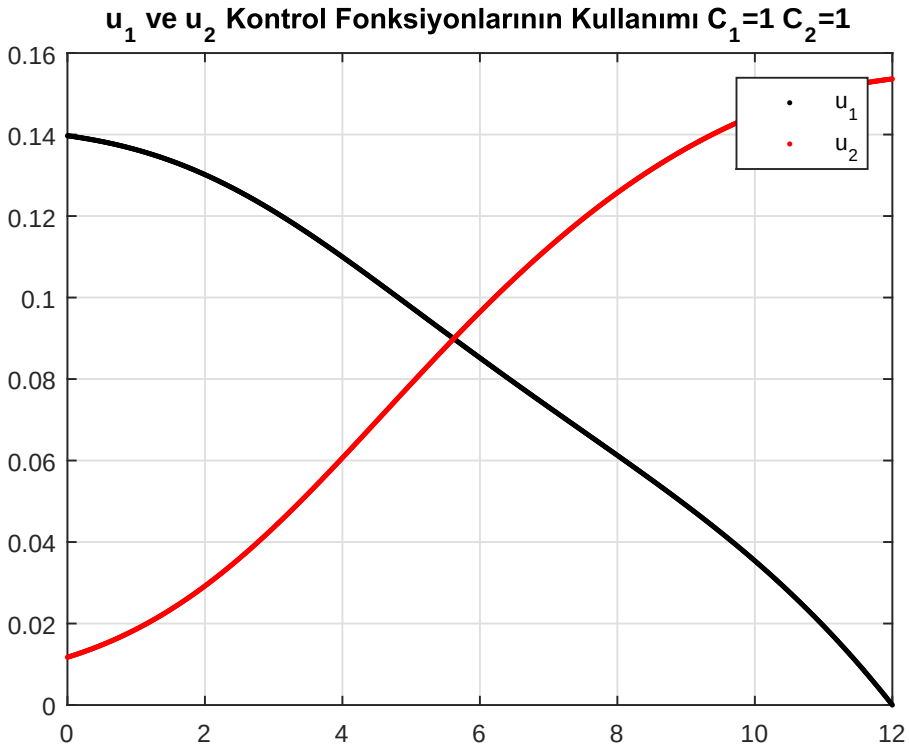
Şekil 5.2. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 > 1$)



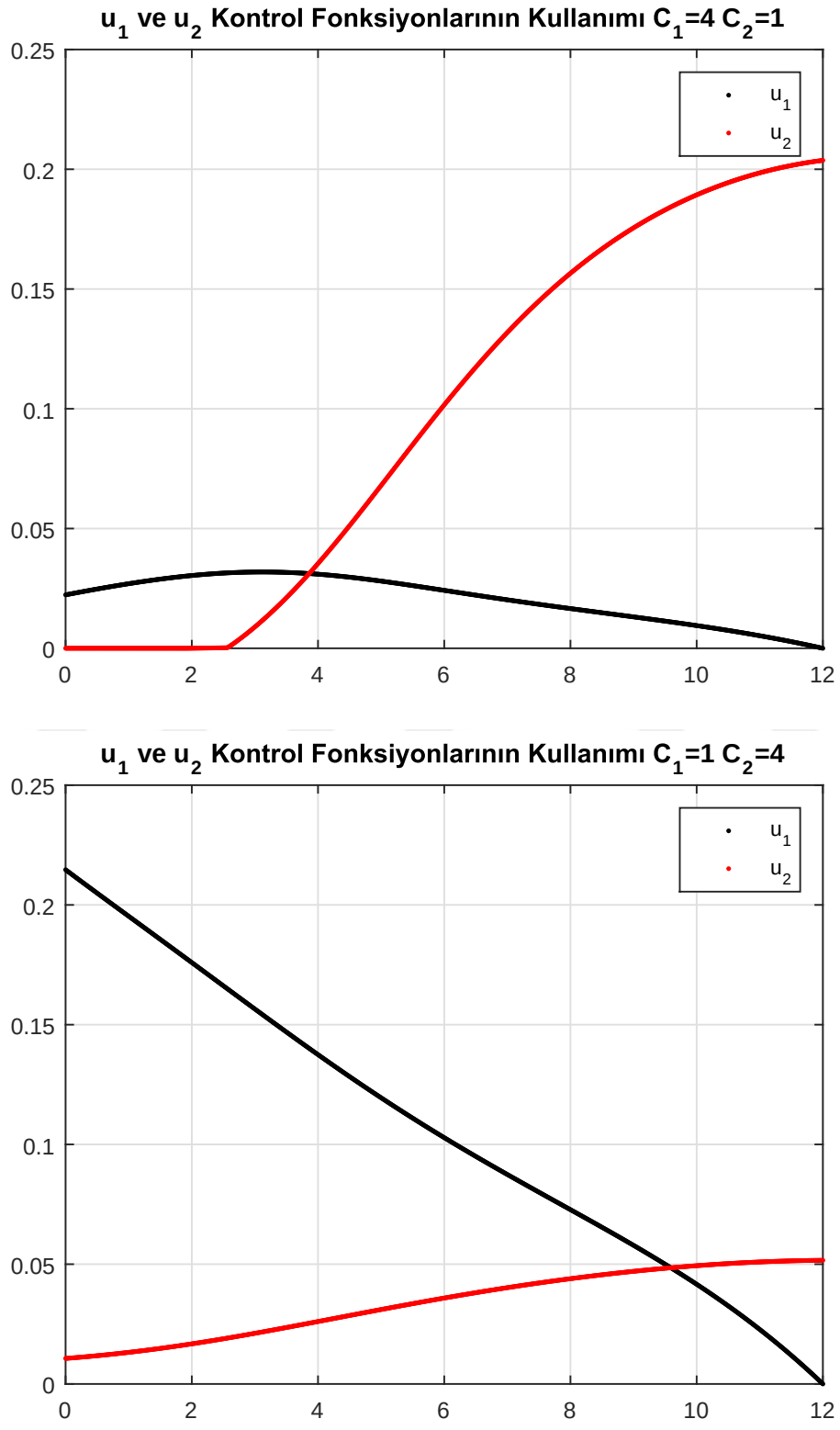
Şekil 5.3. Optimal kontrolün SIR modeli üzerindeki etkisi ($R_0 > 1$)

Şekil 5.3 'deki grafiklere bakalım. Görüldüğü üzere aşılama maliyeti arttıkça aşılanan birey sayısı azalacağından hastalıklı birey sayısı milyonda 0.4 bine kadar çıkarken aşılama maliyetini düşürdüğümüzde yani daha fazla bireye aşı yapıldığında bu sayı milyonda 0.2 bine kadar düştüğü görülmektedir. Diğer yandan tedavi maliyetinin fazla olduğu grafikte ise enfeksiyonlu birey sayısının artışının yavaş olduğu hatta zamanla sabit bir şekilde ilerlediği görülmektedir. Burada aşının sağlıklı bireylere tedavinin ise hastalık kapmış bulastırma olasılığı olan bireylere uygulandığını gözönüne alırsak aşılamanın daha fazla etkili olduğunu hastalık geçirildikten sonra yapılan tedavinin etkisinin daha az olduğu görmüş oluruz. Şekil 5.2 deki ikinci grafiğe göre ise aşılama ve tedavi maliyetinin ikisininde az olduğu durumda hastalıklı bireylerin sayısında hızlı bır artış olmadığı görülür. Bu da maliyet düştükçe aşılanan birey ve tedavi edilen birey sayısı artacağından hastalıklı birey sayısının daha az olacağını gösterir.

Şekil 5.4 ve şekil 5.5 ise maliyet ağırlıkları ile u_1 ve u_2 kontrol fonsiyonlarının grafikleri oluşturulmuştur.



Şekil 5.4. u_1 ve u_2 kontrol fonsiyonlarının etkisi ($C_1 = 1 \quad C_2 = 1$)



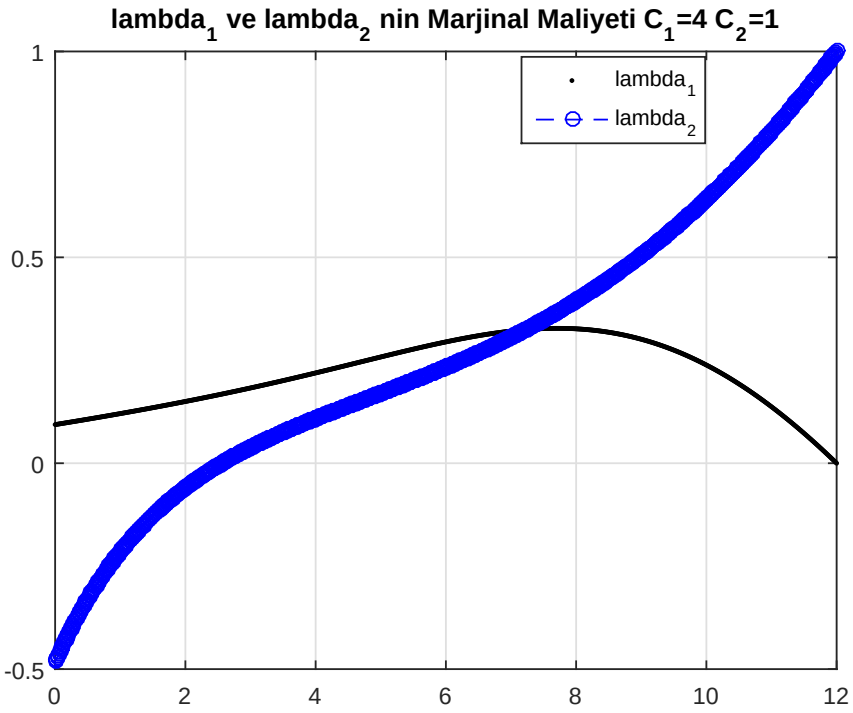
Şekil 5.5. u_1 ve u_2 kontrol fonsiyonlarının etkisi($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$)($C_1 = 1 \quad C_2 = 4$)

Şekil 5.4 ve şekil 5.5 ' deki grafiklere bakalım. Modelimizde kullanılan optimal kontrol bir maliyet fonksiyonuna bağlıdır. Sistemimizde aşılama ve tedavi maliyeti nekadar düşük olursa uygulanacak kontrol (aşılama ve tedavi) miktarı artacaktır. Burada şekil 5.5 'deki grafiklere baktığımızda aşılamanın maliyetinin tedavinin maliyetinden daha yüksek olduğu durumda, hastalığın yayılımını azaltmak ve kontrol altına almak için tedavi kotrolünun arttığı görülmektedir. Bu da duyarlı bireylerin sayısını yeterince hızlı azaltmazken enfeksiyonlu nufusta hızlı bir artışa sebep olmustur. Şekil 5.5 'deki ikinci grafikte tedavi maliyetinin aşılama maliyetinden daha yüksek olduğu durumda ise aşı maliyetinin azaldığı için aşılama kontrolü daha fazla uygulandığı görülmektedir. Bu durum duyarlılarda hızlı bir azalmayla birlikte enfeksiyonlu nüfusta önemli ölçüde azalmaya neden olmuştur. Şekil 5.4 'deki ağırlık maliyetlerinin eşit olması durumunda, aşı kontrolü ve salgının belirli eşiğin altına düşürmek için daha fazla aşı kontrolü ve daha az aşı kontrolü uygulanmalı ; daha sonra daha az aşı kontrolü ve daha fazla tedavi kontrolü uygulanabilir olduğu görülmektedir.

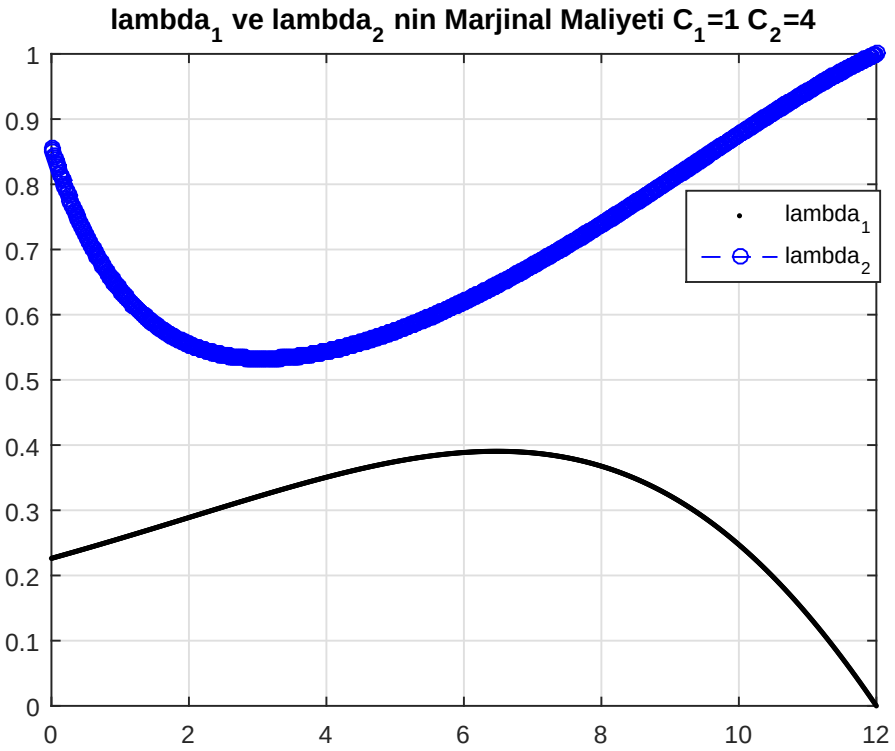
Şekil 5.6 ve 5.7 deki simülasyonlara bakıldığında aşılama ve tedavi ağırlık maliyeti ile λ_1 ve λ_2 arasındaki ilişkiyi gösterir. Burada kullanılan λ_1 ve λ_2 marjinal maliyet üretimin bir birim artırılması sonucu toplam maliyette meydana gelen değişmedir.Bu bağlamda aşılama ve tedavi maliyetinin değişimi sonucu aşının ve tedavinin marjinal maliyetindeki değişime nasıl olduğunu gösterir. Şimdi ağırlık maliyetlerinin değişimi ile grafiklerin nasıl olacağını inceleyelim.

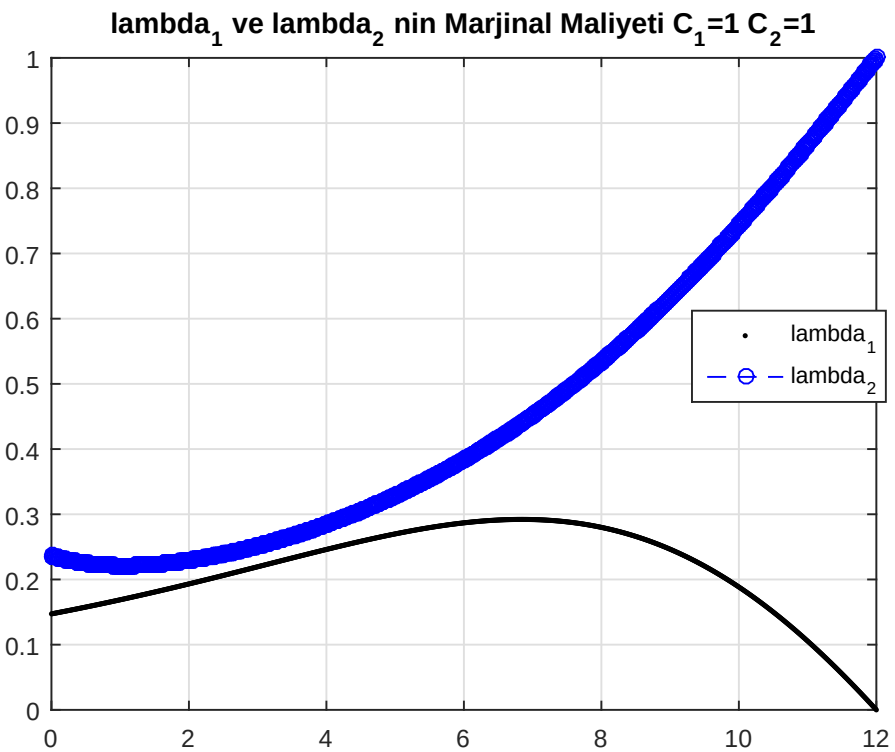
($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$) olduğu grafikte yani aşılama maliyetinin fazla olduğu durumda ilk 7 ayda içinde aşılama ve tedavi marjinal maliyetlerinin arttığını hatta tedavi maliyetindeki artışın daha fazla olduğunu gözlemlemekteyiz. Fakat iki marjinal maliyetin kesişmesinden sonra tedavinin marjinal maliyeti artmaya devam ederken aşılamanın marjinal maliyeti azalacaktır. Burada aşılama maliyeti artınca aşılanan birey sayısı azalacak ve enfeksiyon artacaktır. Bundan dolayı tedavinin marjinal maliyeti zamanla artması kaçınılmaz olacaktır. Buda optimal kontrolün asıl amacı olan en kısa zamanda en az maliyetle en fazla verim alınması ile çelişmektedir. Yani kaçınılması gereken ekonomik olmayan bir yöntemdir. ($C_1 = 1 \quad C_2 = 4$) olduğu durumda ise tedavinin marjinal maliyeti ilk 3 ayda önemli ölçüde azalırken 3 aydan sonra giderek artacaktır. Fakat tedavinin marjinal maliyeti aşılamanın marjinal maliyetinden daha yüksek olduğundan aşılamanın ve tedavinin marjinal maliyetleri çakışmaz. Burada aşılamanın maliyetini düşürdüğümüzde aşılanan birey sayısını daha fazla olacağından iyileşen birey sayısında artmaya sebep olacaktır. Bu durum

da aşılamanın kapsamını genişletmek tedavi kapsamını genişletmekten daha ekonomik bir yöntem olacağını gösterir. ($C_1 = 1 \quad C_2 = 1$) olduğu durumda ise ($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$) olduğu durumla benzer davranışlar göstermiştir. Hatta burada aşılama maliyetinin ve tedavi maliyetinin az olması grafikte görüldüğü gibi aşılamanın marjinal maliyetinde ve tedavinin marjinal maliyetinde ani değişime sebep olmamıştır. Yani aşının yavaş bir şekilde artmış sonra zamanla azalmış tedavinin marjinal maliyeti ise ani düşüş olmadan önce azalıp sonra zamanla artmıştır. Buda daha ekonomik bir yöntem olarak kullanılabilir.



Şekil 5.6. λ_1 ve λ_2 marjinal maliyetlerin etkisi ($C_1 = 4 \quad C_2 = 1$)





Şekil 5.7. λ_1 veλ_2 marjinal maliyetlerin etkisi $(C_1 = 1 \quad C_2 = 4\ ) \quad (C_1 = 1 \quad C_2 = 1)$

6. SONUÇ

Bu çalışmada , bazı bulaşıcı hastalıkların yayılımının tedavi ve aşı ile birlikte belirli bir dönemde yok edilmesine yönelik aşılama ve tedavi stratejilerinin en uygun kombinasyonu üzerinde çalışılmıştır.Kontrol sistem için optimal aşılama ve tedavi kullanılarak değişken popülasyona sahip SIR modeli ele alınmıştır. Denge noktalarının yerel ve global stabil olduğu durumlar değerlendirilmiştir. Kontrolleri karakterize etmek ve optimal sisteme ulaşmak için Pontryagin Maksimum Prensibi vasıtasıyla problemin çözümü gerçekleştirilmiştir.

Optimal aşılama ve tedavi kontrolünün uygulanması durumunda sistemin çözümünün ne şekilde değişeceği nümerik simülasyonlar yardımıyla incelenmiştir. İlk senaryo olarak aşılamanın maliyetinin tedavinin maliyetinden daha yüksek olduğu durumda, hastalığın yayılımını azaltmak için tedavi kotrolünun arttığı görülmektedir. Bu da duyarlı bireylerin sayısını yeterince hızlı azaltmazken enfeksiyonlu nüfusta hızlı bir artışa sebep olmuştur. İkinci senaryo olarak tedavi maliyetinin aşılama maliyetinden daha yüksek olduğu durumda ise aşılama kontrolü daha fazla uygulandığı görülmektedir. Bu durum duyarlılarda hızlı bir azalmayla birlikte enfeksiyonlu nüfusta önemli ölçüde azalmaya neden olmuştur. Son olarak aşılama maliyetinin ve tedavi maliyetinin eşit olduğu bir senaryoda, aşı kontrolü ve salgının belirli eşiğin altına düşürmek için daha fazla aşı kontrolü ve daha az aşı kontrolü uygulanmalı ; daha sonra daha az aşı kontrolü ve daha fazla tedavi kontrolü uygulanabilir olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Allen L.J.S. (2007). *An Introduction to Mathematical Biology, Department of Mathematics and Statistics*. Texas Tech University, Pearson. Education.

Anderson, R.M., May, R.M. (1991). *Infectious Diseases of Humans, Oxford Science Publications*. Great Britain.

Arrowsmith, D.K, Place, C.M. (1986). *Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall, London Newyork.

Bailey, N.T.J. (1975). *The mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications*. 2nd edn Charles Griffin and Co., London.

Baştürk, B. (2017).Bazı SEIR Tipi Salgın Hastalıkların Matematiksel Modelinin Kararlılık Analizi Ve Optimal Aşılama Kontrolü , Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi , Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Kütahya.

Beretta,E., Takeuchi,Y.(1995). Global stability of an SIR epidemic model with time delays. Journal of Mathematical Biology ,33: s.250-260.

Driessche, P., Watmough ,J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Mathematical Biosciences,180, 29-48.

Fisher, K., Dennely, J.(2005). Immunotherapy: An optimal control theory approach. Mathematical Biosciences, England, 499-510.

Fleming, W.H., Rishel, R.W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag , New York Heidelberg Berlin.

Granish,R., Gilks, C., Dye,C., Cock, K., Williams, B. (2008) . Universal voluntary HIV testing with immediate antiretroviral therapy as a strategy for elimination of HIV transmission:a mathematical model, The Lancet.

Hackbush, W. (1978). A numerical method for solving parabolic equations with opposite arrentations. Computing,20,229-240.

Hethcote, H.W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. SIAM Review, 42 , 599-653.

Hethcode, H.W., Waltman, P.(1973). Optimal Vaccination Schedules in a deterministic epidemic model. Math Biosci, 18, 473-482. [0.4cm] Jordan D.W, Smith, P. (1987).*Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford.

Joshi,H.R., Lenhart, S., Hota,S., Agusto, F.(2015). Optimal Control Of An SIR Model With Changing Behavior Throuth An Education Campaing . Electronic Journal of Differential Equations 50, s. 1-14.

Kamien, M.I., Schwartz, N.L., (1991). Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control on Economics and Management (Secend Edition). Nort Holland, Amsterdam and New York.

Keeling, M.J, Rohani, P. (2008).*Modelling Infectious Diseases In Humans And Animals*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Kirschner, D., Lenhert, S., Sebany, S. (2007). Optimal Control of Chemotherapy of HIV. Jawel of Mathematical Biology, 35, 775-792.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Lasalle, J.(1976). *The stability of dynamical systems*. Philadelphia. SIAM.

Lenhart, S., Workman, J.T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. Boca Raton, F.L. Florida: Taylor and Franis Group, LLC.

Nanda,S., Moore, H., Lenhart,S. (2007) . Optimal control of treatment in a mathematical model of chronic myelogenous leukemia. Mathematical Biosciences, 210, 143-156.

Naresh,R., Tripathi,A., Omar,S.(2006) . Modelling the spread of aids epidemic with vertical transmission. Applied Mathematics and Computation ,178, 262-272.

Sydsaeter,K., Hamman,P.J. (2007). *Mathematics for economic analysis*. Prentica Hall, Upper Saddle River ,New Jersey ,1995.

Tewa, J.J., Dimi, J.L., Bowong, S. (2009). Lyapunov Functions for a Dengue Disease Transmission Model. Chaos, Solitons and Fractals, 39, 936-941.

Wang, K., Fan, A., Torres, A. (2010). Global properties of an improved hepatitis B virus model. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11(4), 3131-3138.

Wiggins, S., (1990),*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, Newyork Berlin London.

Xiao,D., Ruan S., (2007).*Mathematical Biosciences,Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate*. ,208, 419-429.

Yusuf, T.T, Benyah, F. (2012). Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological model. World Journal of Modelling and Simulation, 8, 194-204.

Zaman, G., Kong, Y., Jung, I. (2008). Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemiological model. Biosystems, 93, 240-249.

Zhang,T., Teng Z.(2008).Global behavior and permanence of sirs epidemic model with time delay. Nonlinear Analysis: Real World Applications,9, 1409-1424.